Propagation des ERREURS
et
Calcul des INCERTITUDES

Application aux modèles solaires et aux taux de réactions

Bernard PICHON
Département G.-D. Cassini (UMR 6529 du CNRS)

Disponible sur le Web : http://www.obs-nice.fr/pichon/Paris-PNPS.pdf

BUT : Compte tenu des observations (valeurs **et** incertitudes) dont on dispose sur le Soleil, il s'agit d'obtenir de manière **cohérente** les valeurs des paramètres du modèle *choisi* (e.g. longueur de mélange) par calibration du modèle (c'est-à-dire ajustement des paramètres) **et** leurs incertitudes (leurs « intervalles de confiance »).

Par la **même** procédure, on peut *aussi* calculer les incertitudes d'autres quantités physiques (e.g. les fréquences d'oscillation) et *aussi* analyser les effets des incertitudes des taux de réactions nucléaires.

MOYENS : Etablissement d'une taxinomie --- des paramètres (les arguments « d'entrée ») et --- des observables (les arguments « de sortie ») ce qui fournit *un* modèle ;

Détermination des valeurs et des incertitudes à donner aux variables dites de contrainte ;

Détermination des incertitudes sur les paramètres ajustables par résolution inverse de l'équation de propagation des erreurs ;

Détermination des incertitudes sur les observables par résolution directe de l'équation de propagation des erreurs.

PLAN

<u>Remarque concernant la « durée » de l’année :</u>

D’un autre côté, il ne faut pas introduire des ‘incertitudes’ là où ce n’est pas ‘nécessaire’ : Dans les calculs d’évolution, indiquer les temps (durées) en années conduit à rendre ces quantités ‘incertaines’ (par exemple, lors de la comparaison entre différents calculs issus de différents codes) de quelques 10^{-5} et ce, selon la durée (en secondes) de l’année utilisée par chacun de ces codes (l’année n’est pas une unité de temps !).
Par exemple, CESAM utilise une durée de l’année de 365.24219878 jours (venant de l’ancienne définition de la seconde : 1 an = 31556925.9747 s) alors que l’on pourrait tout aussi bien utiliser une durée de 365.25 jours (*valeur bien plus couramment utilisée en astronomie*).

Taxinomie *ou* Taxonomie : Science des techniques de classification (originellement du monde végétal et animal)

Etablissement d'une taxinomie des paramètres (les arguments « d'entrée ») et des observables (les arguments « de sortie ») :

En effet, dans toute modélisation, il y a lieu de distinguer d'une part le type d'arguments c'est-à-dire ceux d'entrée du programme (que l'on dénomme « **les paramètres** ») de ceux de sortie (dénommés « **les observables** ») ;
Mais surtout, leur statut vis-à-vis du mode d'obtention et/ou d'utilisation de leurs valeurs et aussi de leurs incertitudes.
Dans le cadre de la modélisation solaire, nous donnons quelques exemples de quantités de chaque classe.

-- 1 -- soit fournis comme résultats d'observations (ce seront donc des observables dites « **de contrainte** » du modèle sur lesquelles le modèle devra être ajusté ou calibré) ;

➔ exemple : **La luminosité et la température effective**

-- 2 -- soit fournis par d'autres expériences dont la valeur et son incertitude sera prise en compte au niveau de la comparaison des résultats (ce seront donc, probablement, des observables dites « **de résultat** ») ;

➔ exemple : **Le rayon** (qui peut, *aussi*, se déduire des deux précédentes quantités)

-- 3 -- soit au niveau des arguments d'entrée (ce seront donc des paramètres dits « **ajustables** » s'ils sont calculés par ajustement du modèle par rapport aux observables de contrainte) ;

➔ exemple : **La longueur de mélange** (du moins dans l'état actuel de la modélisation hydrodynamique) ;

-- 4 -- soit, des ingrédients physiques du modéle et dans ce cas, ce sont des paramètres dits « **libres** » .

➔ exemple : **Les taux de réactions (thermo) nucléaires** ;

Signalons que certains arguments peuvent, tout simplement, être considérés comme des constantes (de définition) : par exemple, la masse du Soleil (ou plus exactement, son produit par la constante de la gravitation, voir discussion ci-dessous).

Bien sûr, certains arguments peuvent être, selon le désir et/ou le besoin, dans l'une ou l'autre des quatre catégories énumérées ci-dessus (par exemple, l'âge du Soleil, les fréquences d'oscillation, ...). À chaque choix, correspond donc une modélisation différente avec ses avantages et inconvénients.

<u>Et c'est cet ensemble que nous appellerons se donner *un* modèle !</u>

Remarquons donc que cette classification n'est pas unique : par exemple, la quantité initiale d'hélium Y_0 peut tout aussi bien être considérée comme ***observable de contrainte*** (si l'on croit pouvoir utiliser les valeurs publiées et s'en servir pour contraindre les paramètres ajustables du modèle), comme ***observable de résultat*** et s'en servir donc comme élément de comparaison de notre modèle avec, par exemple, d'autres modèles, comme ***paramètre libre*** si l'on a suffisamment confiance en des calculs de nucléosynthèse primordiale et d'évolution chimique de la Galaxie ; enfin, comme ***paramètre ajustable*** si l'on estime être capable d'en déterminer une valeur fiable (et son incertitude associée) à partir des observables de contrainte compte tenu des autres paramètres ajustables pris en compte !

Observables de contrainte

$$(y_i , \sigma(y_i))_i$$

e^{vt} $$(y_i , \sigma'(y_i))_i$$

Paramètres ajustables

$$(\alpha_m , \sigma(\alpha_m))_m$$

+ e^{vt}

Observables de résultat

$$(z_n , \sigma(z_n))_n$$

e^{vt} $$(z_n , \sigma'(z_n))_n$$

Paramètres libres

$$(\beta_k , \sigma(\beta_k))_k$$

Comparaison

Modélisation

Equation de propagation des « erreurs » :

On considère que les observables (au sens général du terme) $\mathbf{y_i}$ sont, de fait, des fonctions $\mathbf{y_i(x_j)}$ des paramètres (au sens général du terme) $\mathbf{x_j}$.

On note par $\mathbf{D}$ la matrice jacobienne (dite de 'design') : $D_{ij} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$

$\mathbf{C}$ la matrice de variance-covariance des paramètres

$\mathbf{\Sigma}$ la matrice de variance-covariance des observables

L'équation dite de « propagation des erreurs » est :

$$\mathbf{\Sigma = D\ C\ {}^tD}$$

Détermination des incertitudes sur les paramètres ajustables par résolution inverse de l'équation de propagation :

On connaît la matrice Σ ou, dans un premier temps, une approximation diagonale (qui équivaut à considérer que les incertitudes sur les observables ne sont pas corrélées ; les observables pouvant être corrélées !).

Il s'agit donc de trouver une matrice C (sur les paramètres du modèle) :

$$\mathbf{C = (\ {}^tD\ \Sigma^{-1}\ D\ )^{-1}}$$

Détermination des incertitudes sur les observables par résolution directe de l'équation de propagation des erreurs :

Les incertitudes et corrélations sur les paramètres ajustables étant désormais connues, on peut obtenir une meilleure approximation de la matrice Σ (les corrélations dues au modèle sont contenues dans la matrice D) en réutilisant l'équation de « propagation des erreurs ».
On peut aussi calculer les incertitudes sur d'autres observables (à des fins de comparaison donc, par exemple pour évaluer la robustesse du modèle) en rajoutant (et calculer !) des lignes à la matrice D .
De même, en prenant en compte d'autres paramètres (les paramètres dits libres) c'est-à-dire en complétant la matrice C par les écarts-types connus (par ailleurs) de ces paramètres et en rajoutant (et en calculant !) des colonnes à la matrice D , on peut ainsi étudier la sensibilité du modèle à ces paramètres et analyser les effets de l'incertitude de leurs valeurs sur les différentes observables :

Exemple d'application dans le cadre du Soleil : Étude de l'influence des incertitudes des taux de réaction (thermo-)nucléaires sur les valeurs des fréquences d'oscillation des modes g .

Illustration : On a vu ci-dessus que le *rayon* R_{sun} , la température effective T_{eff} et la luminosité L_{sun} ne sont pas des quantités indépendantes. Dans un paragraphe précédent, nous avons choisi, comme observables de contrainte T_{eff} et L_{sun} . Ces valeurs et les écarts-types de ces deux quantités ayant été obtenus par des moyens distincts, on peut considérer que leurs incertitudes sont décorrélées c'est-à-dire que la partie de la matrice de variance-covariance les concernant est diagonale (voir, cependant, le cas C1) .

Détermination des valeurs et des incertitudes des variables de contrainte :

Dans le cadre du Soleil, en ce qui concerne les deux principales observables de contrainte (luminosité et température effective), on a retenu les valeurs et incertitudes (écart-type) suivantes :

$L_{sun} = 3.8455 \pm 0.0077 \ 10^{33}$ erg/s — détermination indépendante obtenue à partir de la mesure de la constante solaire (entre autres).

$T_{eff} = 5767 \pm 21$ K — détermination via un modèle (indépendant) de l'atmosphère du Soleil.

d'où l'on peut déduire :

$R_{sun} = 6.985 \pm 0.051 \ 10^{10}$ cm — obtenu ***uniquement*** (valeur et écart-type) par la relation : $Lsun = 4\pi R_{sun}^2 \sigma T_{eff}^4$

Remarque concernant la « masse » du Soleil :

La valeur retenue pour la « masse » du Soleil est telle que :

$G\,M_{sun} = 1.327\,124\,20 \pm 0.000\,000\,02 \ 10^{20}$ SI (valeur considérée dans notre cas comme une valeur exacte !).

En effet, c'est la détermination même de G qui limite la détermination précise (et augmente donc inutilement l'incertitude) sur la masse du Soleil alors que la valeur du produit est bien mieux connue. Naturellement, et comme les équations de la structure interne le suggèrent, nous avons vérifié que CESAM possède bien la propriété d'invariance du produit.

Citons, que la valeur retenue pour G dans les années 1990 était de : $G = 6.67256 \pm 0.00085 \ 10^{-11}$ SI

Alors que la valeur recommandée actuellement est de : $G = 6.673 \pm 0.010 \ 10^{-11}$ SI

Remarque : On ne traitera pas explicitement le calcul (par la méthode des moindres carrées) des valeurs des paramètres ajustables à partir de celles des observables de contrainte. Dans cette section, on s'intéressera uniquement au calcul des incertitudes (écarts-type) à attribuer à ces valeurs.

Du fait de la relation $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, nous utiliserons comme variables de calcul : ln(L) , L en 10^{33} erg/s ; ln(T) , T en K et ln(R) , R en 10^{10} cm .

et on a la relation : ln(R) = 18.590123 + 0.5 ln(L) - 2.0 ln(T) d'où la matrice de 'design' : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$

Cas **A** : Aucune donnée disponible sur R_{sun} (le calcul doit donc nécessairement être fait par la formule), situation que l'on peut retrouver dans le programme en donnant à R_{sun} une valeur quelconque et un écart-type (très très) grand ; par exemple : R_{sun} = (9.000) ± (5.078 10^{14}) !!

Luminosité	Température	Rayon
3.8455	5767.	6.985
± 0.0077	± 21.	± 0.051
(2.00 ‰)	(3.64 ‰)	(7.35 ‰)

Cas **B** : Aucune donnée disponible sur R_{sun} mais, on calcule (à la main !) la valeur (et son écart-type) de R_{sun} = 6.985 ± 0.051 , valeurs que l'on reporte (par erreur !) dans la (même) procédure de calcul ; ainsi, on induit en erreur le programme en lui donnant pour R_{sun} des renseignements supplémentaires mais non justifiés ce qui semble améliorer, à tort, les incertitudes sur les observables.

Luminosité	Température	Rayon	
3.8455	5767.	6.985	
± 0.0077	± **15.**	± **0.036**	*ce qui est non justifié !*
(1.99 ‰)	(2.58 ‰)	(5.17 ‰)	

Cependant, on peut se donner ***une*** valeur observée d'***un*** rayon solaire (sans discuter l'aspect astrophysique de ce que représente ***cette*** mesure vis-à-vis de ce que le code CESAM calcule comme étant le rayon du Soleil). On va voir, via ce modèle très simple, l'intérêt physique de traiter le problème d'ajustement de ces trois observables par une méthode mathématique cohérente et l'influence de ***cette*** information supplémentaire sur les incertitudes.

Cas **C1** : Comme annoncé, on se '*procure*' une valeur et un écart-type sur R_{sun} . Dans ce premier sous-cas, laissons à cette valeur de R_{sun} son (très petit) écart-type (tel qu'il a été donné dans la littérature, tout en se rappelant que cette valeur ne correspond pas à la valeur cohérente du rayon tel que calculé par CESAM !). Cette valeur est : $R_{sun} = (6.95508 \pm 0.00026)\ 10^{10}$ cm

Luminosité	Température	Rayon	
3.84**49**	57**79**.	6.9**551**	
± 0.0076	± **3**.	± **0.0003**	*à méditer !*
(1.98 ‰)	(0.50 ‰)	(0.04 ‰)	

Cas **C2** : La même problématique que pour le cas C1 mais, compte tenu de l'inconnue de ce que représente la valeur choisie pour R_{sun} , on multiplie (de façon arbitraire) son écart type par un facteur 100.0 : $R_{sun} = (6.95508 \pm 0.026)\ 10^{10}$ cm

Luminosité	Température	Rayon	
3.845**0**	57**76**.	6.9**61**	
± 0.0076	± **10**.	± **0.023**	*commence à être compatible avec*
(1.99 ‰)	(1.71 ‰)	(3.33 ‰)	*les résultats du A !*

Cas **C3** : La même problématique que pour le cas C1 mais, compte tenu de l'inconnue de ce que représente la valeur choisie pour R_{sun}, , on multiplie (de façon arbitraire) son écart type par un facteur 1000.0 . $R_{sun} = (6.95508 \pm 0.26)\ 10^{10}$ cm

Luminosité	Température	Rayon	
3.8455	5767.	6.98**4**	
± 0.0077	± 21.	± 0.051	*on retrouve ici les mêmes résultats*
(2.00 ‰)	(3.57 ‰)	(7.21 ‰)	*qu'au A mais à 1000 σ !*

Pour chacun des quatre cas que nous avons présenté en exemple, on donne ici, et pour les plus courageux des lecteurs, les renseignements issus du calcul de la matrice de variance - covariance en présentant uniquement dans la partie triangulaire inférieure, les coefficients de corrélation (la racine carrée des termes diagonaux n'est rien d'autre que la précision relative des résultats).

Cas A : $\begin{pmatrix} . & . & . \\ 0.000 & . & . \\ 0.136 & -0.991 & . \end{pmatrix}$

On vérifie bien que, dans ce cas, luminosité et température ne sont pas corrélées et que température et rayon sont fortement anti - corrélés.

Cas B : $\begin{pmatrix} . & . & . \\ 0.097 & . & . \\ 0.096 & -0.981 & . \end{pmatrix}$

Le fait d'introduire (ici, à tort) une information supplémentaire sur le rayon, rend maintenant les trois variables corrélées ; le rayon et la température étant le plus fortement corrélés.

Cas C1 : $\begin{pmatrix} . & . & . \\ 0.999 & . & . \\ 7.0\ 10^{-4} & -0.037 & . \end{pmatrix}$

Ici, le rayon semblant être parfaitement déterminé, c'est donc tout naturellement la luminosité et la température qui doivent s'adapter pour que la formule soit vérifiée et, cela faisant elles deviennent très fortement corrélées.

Cas C2 : $\begin{pmatrix} . & . & . \\ 0.230 & . & . \\ 0.062 & -0.957 & . \end{pmatrix}$

Un peu moins 'brutal' que le cas précédent !

Cas C3 : $\begin{pmatrix} . & . & . \\ 0.005 & . & . \\ 0.134 & -0.990 & . \end{pmatrix}$

Tout devrait donc être maintenant évident !

Application, à travers CESAM, au modèle Solaire

Détermination des valeurs et des incertitudes des variables de contrainte :

Les modèles solaires ont été calibrés (ajustés) pour les valeurs suivantes des observables (et de leurs incertitudes) :

$L_{sun} = 3.8455 \pm 0.0077\ 10^{33}$ erg/s c.-à-d. à 2 ‰
$R_{sun} = 6.98497 \pm 0.0508\ 10^{10}$ cm c.-à-d. à 7 ‰ (cf. section précédente)
$(Z/X)_{surf} = 0.0245 \times (1.0 \pm 0.1)$ c.-à-d. à 100 ‰ !

Ce qui conduit aux valeurs suivantes des paramètres (ajustables) :

$\alpha = 1.899946\ldots$	longueur de mélange
age = 4685.0 ans	age du modèle
$Y_{init} = 0.271995\ldots$	contenu initial du Soleil en hélium
$(Z/X)_{init} = 0.0278571\ldots$	métallicité initiale du Soleil

Autres données (observables) :

Y_{surf} entre 0.2443 et 0.2489	contenu du Soleil en hélium
$R_{ZC} = 0.713 \pm 0.003$	Rayon de la Zone convective (en R_{sun}).
	Rmq : pour une valeur calculée de 0.713547…

Remarque importante : Tous les modèles partagent les mêmes valeurs des paramètres ajustables.

Du fait même de notre définition de ce qu'est un modèle, c'est le choix de l'ensemble des observables de contrainte et des paramètres considérés qui détermine les valeurs des incertitudes calculées de ces paramètres.

Aussi, on peut faire des comparaisons entre incertitudes calculées et leurs valeurs mesurées pour certaines (autres) observables e.g. R_{ZC} .

<u>Préliminaires :</u>

Il faut déjà faire un premier choix sur l'ensemble maximal des observables « intéressantes » (naturellement celles qui pourront servir de contraintes comme L et R par exemple, mais aussi celles qui serviront de base de comparaison comme R_{ZC}) c'est-à-dire les $(y_i)_i$ du formalisme page 5.

De même, on se donnera l'ensemble maximal des paramètres (actuellement : α , age , Y_{init}, $(Z/X)_{init}$) de modélisation c'est-à-dire les $(x_j)_j$ du formalisme page 5.

Pour l'ensemble des observables et pour chaque paramètre, on calculera les dérivées partielles de chacune de ces observables par rapport à ce paramètre (ceci pour obtenir une colonne de la matrice D). Pour ce faire, on fera plusieurs modèles solaires en faisant varier (légèrement) le paramètre en question afin d'avoir, par une méthode de différences finies, une évaluation de cette dérivée.

Afin d'évaluer au mieux cette dérivée, parmi les différentes méthodes testées, j'ai choisi de faire varier le paramètre, noté x , des quantités ± dx , ± 2 dx, ± 4 dx et ± 8 dx . Un tel choix permet de calculer (en n'utilisant que des dérivées dites centrées) 4 fois une dérivée première à l'ordre 2 mais aussi 6 fois à l'ordre 4 (en éliminant la dérivée troisième, i.e. en utilisant les évaluations en x ± dx et x ± 2 dx *ou* x ± 2 dx et x ± 4 dx *ou* x ± 4 dx et x ± 8 dx *ou* x ± dx et x ± 4 dx *ou* x ± 2 dx et x ± 8 dx *ou* x ± dx et x ± 8 dx). De même, on évalue de 4 manières la dérivée seconde à l'ordre 3 et de 6 manières cette dérivée seconde à l'ordre 5 .

Par exemple :

$$2\ h\ f'(x) = \frac{-1}{\lambda(\lambda^2-1)}\Big(f(x+\lambda h) - f(x-\lambda h)\Big) + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)}\Big(f(x+h) - f(x-h)\Big)$$

de même :

$$h^2\ f''(x) = \frac{-1}{\lambda^2(\lambda^2-1)}\Big(f(x+\lambda h) + f(x-\lambda h)\Big) + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)}\Big(f(x+h) + f(x-h)\Big) - 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}f(x)$$

Rmq : pour les matheux, étudier les limites : $\lambda\to+\infty$, $\lambda\to 1$, $\lambda\to 0$!

Modèles avec 1 seul paramètre :

De façon physique, il apparaît que cela ne peut être raisonnablement que la longueur de mélange !

Avec deux contraintes observationnelles	L et R :	$\alpha = 1.90 \pm 0.06$	(29 ‰)
	D'où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.005$	(7 ‰)
Avec trois contraintes observationnelles	L, R et R_{ZC} :	$\alpha = 1.90 \pm 0.03$	(15 ‰)
	D'où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.0025$	(4 ‰)

Remarques :

- Ces très/trop bons résultats viennent simplement du fait qu'il y a moins de paramètres que d'observables qui à travers la méthode des moindres carrés « sélectionne » la combinaison qui minimise (artificiellement) les erreurs. L'effet est d'autant plus important que le système est plus sur-déterminé (ce qui est le cas avec un seul paramètre).
  Par exemple, avec l'incertitude calculée sur α , l'erreur sur L ne serait que de 0.8 ‰ et celle sur R que de 2.6 ‰ (contre, respectivement, 2.0 ‰ et 7.3 ‰ pour les incertitudes mesurées).
- Le choix d'un paramètre unique fait que toutes les observables sont, soit entièrement corrélées, soit entièrement anticorrélées. On peut ainsi mettre dans une classe L, Y_{surf} et $(Z/X)_{surf}$ et dans l'autre R et R_{ZC} .

Modèles avec 2 paramètres :

De façon physique, il apparaît que cela ne peut être raisonnablement que la longueur de mélange et l'âge !

Avec deux contraintes observationnelles	L et R :	$\alpha = 1.90 \pm 0.07$	(38 ‰)
		Age = 4685 ± 30	(7 ‰)
	D'où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.007$	(10 ‰)
Avec trois contraintes observationnelles	L, R et R_{ZC} :	$\alpha = 1.90 \pm 0.03$	(15 ‰)
(système sur-déterminé)		Age = 4685 ± 24	(5 ‰)
	D'où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.0028$	(4 ‰)

Remarque : Là encore, on observe une amélioration artificielle des incertitudes dans le cas sur-déterminé. Il est donc inutile (voire déconseillé) de rajouter des contraintes supplémentaires i.e. Y_{surf} et/ou $(Z/X)_{surf}$; de toute façon, on constate qu'il n'y a pas d'amélioration (même artificielle !) des incertitudes.

Modèles avec 3 paramètres :

De façon physique, il apparaît que cela ne peut être raisonnablement que la longueur de mélange, l'âge et Y_{init} !

Avec deux contraintes observationnelles L et R :		$\alpha = 1.90 \pm 0.07$	(39 ‰)
(système sous-déterminé)		$Age = 4685 \pm 11$	(3 ‰)
		$Y_{init} = 0.2720 \pm 0.0002$	(0.9 ‰)
	D'où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.007$	(10 ‰)
Avec trois contraintes observationnelles L, R et R_{ZC} :		$\alpha = 1.90 \pm 0.04$	(22 ‰)
		$Age = 4685 \pm 650$	(138 ‰)
		$Y_{init} = 0.2720 \pm 0.006$	(21 ‰)
	D'où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.0028$	(4 ‰)
Avec plus de contraintes observationnelles :		$\alpha = 1.90 \pm 0.03$	(16 ‰)
(système sur-déterminé)		$Age = 4685 \pm 224$	(48 ‰)
		$Y_{init} = 0.2720 \pm 0.002$	(7 ‰)
	D'où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.0026$	(11 ‰)

Remarque : Là encore, on observe une amélioration artificielle des incertitudes dans les cas sur- ou sous- déterminé, avec des résultats extrêmement voisins qu'il y ait 4 ou 5 contraintes. Il est donc inutile (voire déconseillé) de rajouter des contraintes supplémentaires i.e. Y_{surf} et/ou $(Z/X)_{surf}$; de toute façon, on constate qu'il n'y a pas d'amélioration (même artificielle !) des incertitudes.

Modèles avec 4 paramètres :

C’est à dire, dans le cas présent : longueur de mélange, l’âge, Y_{init} et $(Z/X)_{init}$!

Avec deux contraintes observationnelles L et R :		$\alpha = 1.90 \pm 0.01$	(5 ‰)
(système très sous-déterminé)		Age = 4685 ± 2	(0.4 ‰)
		$Y_{init} = 0.2720 \pm 0.024$	(86 ‰)
		$(Z/X)_{init} = 0.02786 \pm 0.008$	(288 ‰)
	D’où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.003$	(4 ‰)
Avec trois contraintes observationnelles L, R et R_{ZC} :		$\alpha = 1.90 \pm 0.04$	(18 ‰)
(système sous-déterminé)		Age = 4685 ± 3	(0.6 ‰)
		$Y_{init} = 0.2720 \pm 0.018$	(67 ‰)
		$(Z/X)_{init} = 0.02786 \pm 0.0063$	(225 ‰)
	D’où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.003$	(4 ‰)
Avec trois contraintes observationnelles L, R et $(Z/X)_{surf}$:		$\alpha = 1.90 \pm 0.07$	(40 ‰)
(système sous-déterminé)		Age = 4685 ± 12	(3 ‰)
		$Y_{init} = 0.2720 \pm 0.008$	(30 ‰)
		$(Z/X)_{init} = 0.02786 \pm 0.0029$	(102 ‰)
	D’où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.008$	(11 ‰)
Avec plus de contraintes observationnelles :		$\alpha = 1.900 \pm 0.033$	(18 ‰)
(système bien-déterminé)		Age = 4685 ± 456	(97 ‰)
		$Y_{init} = 0.272 \pm 0.003$	(12 ‰)
		$(Z/X)_{init} = 0.02786 \pm 0.0020$	(74 ‰)
	D’où (e.g.)	$R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.003$	(4 ‰)

Remarque : Dans ce dernier cas, le dernier paramètre introduit est $(Z/X)_{init}$ qui dépend très fortement (et quasi exclusivement : à 96 %) de $(Z/X)_{surf}$; il introduit une sorte de découplage entre ce paramètre et les 3 autres et on se retrouve à peu près dans la situation précédente.

CONCLUSIONS :

On donne d'abord l'incertitude au sens statistique (de type A dans la nomenclature du NIST), incertitude qui relie, dans un modèle donné, l'erreur admissible de ce paramètre compte tenu des erreurs évaluées des observables de contrainte puis une incertitude systématique (de type B dans la nomenclature du NIST), incertitude dépendant du choix de modèle retenu (choix guidé par d'autres considérations) :

Des différents cas étudiés, on peut retenir :

Paramètre		Valeur		Incertitudes statistique	Incertitudes systématique
α	=	1.90	±	0.04	± 0.03
Age	=	4685	±	450	± 200
Y_{init}	=	0.272	±	0.003	± 0.015
$(Z/X)_{init}$	=	0.028	±	0.003	± 0.005

soit, présenté autrement,

α	=	1.90	±	(de 0.04 à 0.07)	(de 18 ‰ à 40 ‰)
Age	=	4685	±	(de 450 à 650)	(de 97 ‰ à 138 ‰)
Y_{init}	=	0.272	±	(de 0.003 à 0.018)	(de 12 ‰ à 67 ‰)
$(Z/X)_{init}$	=	0.028	±	(de 0.003 à 0.008)	(de 100 ‰ à 290 ‰)

ATTENTION : Les paramètres étant corrélés, on ne peut pas choisir librement n'importe quelle valeur de ces paramètres dans leurs intervalles de confiance (ce qui reste vrai, c'est que des valeurs en dehors des intervalles cités sont exclues).

Commentaires : En ce qui concerne l'âge, le choix a été fait de ne garder que les évaluations des incertitudes liées à des systèmes bien déterminés, du fait de la situation du Soleil sur la séquence principale et donc de la faible variation des observables avec l'âge. $(Z/X)_{init}$ n'ayant été introduit que comme 4eme paramètre, les incertitudes ne proviennent que des calculs présentés page 14. Remarquer aussi un très bon accord entre la valeur observée et calculée pour $R_{ZC} = 0.7135 \pm 0.003$