Chapitre 1 : Fonctions à Variable complexe

I - Généralités - Introduction

1) Définition

Ce sont des fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto f(z)$$

ex : $f(z) = |z|$, z^2 , $az + b$... avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$

La différence par rapport aux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est que z et $f(z)$ se déplacent dans un espace à 2 Dim

↳ des propriétés nouvelles et intéressantes dans les calculs d'intégrales.

* Représentation graphique :

→ dans $\mathbb{R}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pas de pb. un axe pour x et un pour $f(x)$.

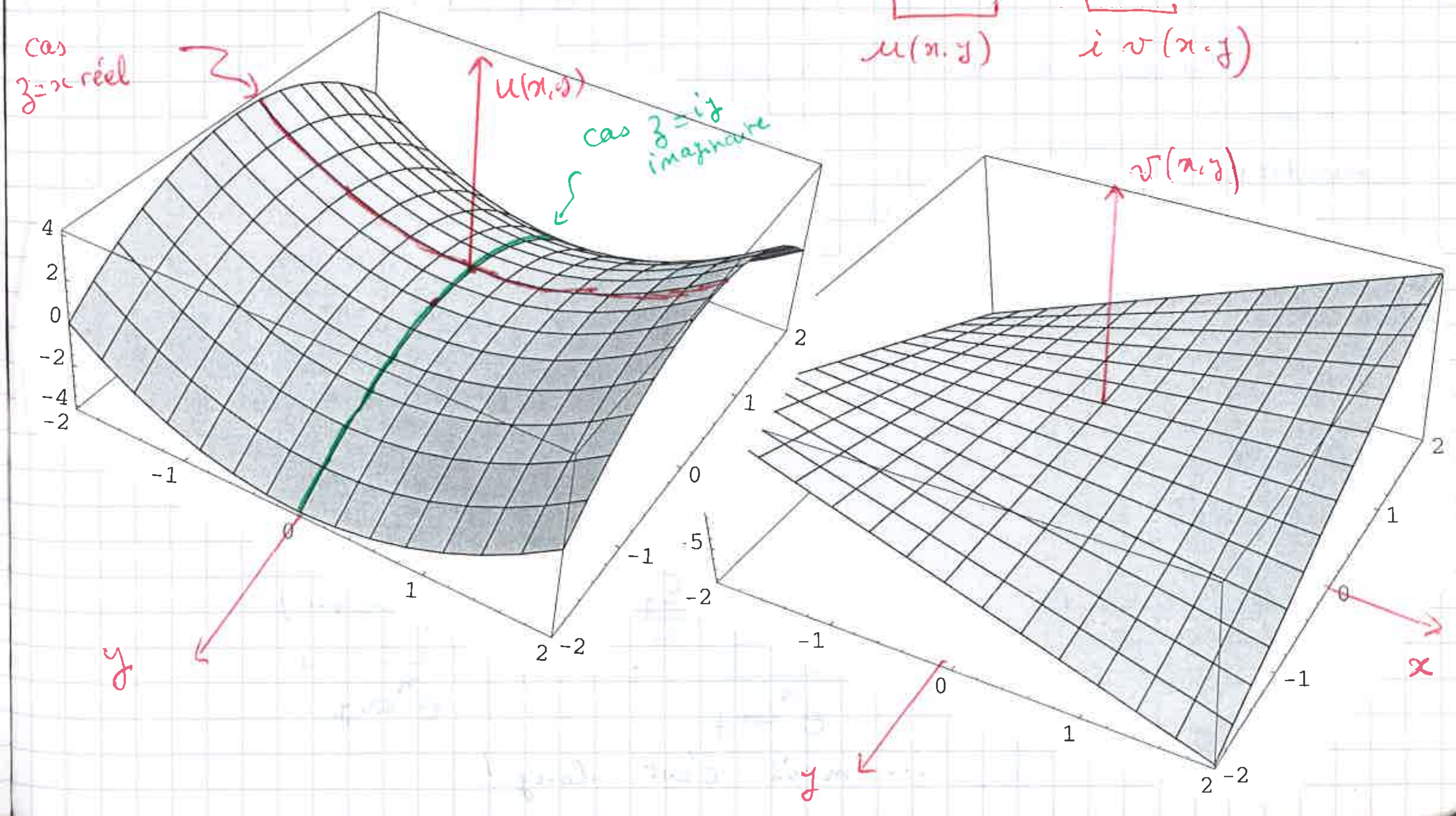
→ dans $\mathbb{C}$: on pose $z = x + iy$

$$f = u + vi = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

⇒ 4 variables ⇒ il faut 4 dimensions pour faire le graphe.

Une possibilité est de représenter séparément $\begin{cases} u = \mathrm{Re}\, f \\ v = \mathrm{Im}\, f \end{cases}$

exemple : $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2ixy}_{i\,v(x,y)}$



2) fonctions analytiques

* Exemple : exponentielle

dans $\mathbb{R}$ $\exp x$ peut se définir comme la somme d'une série

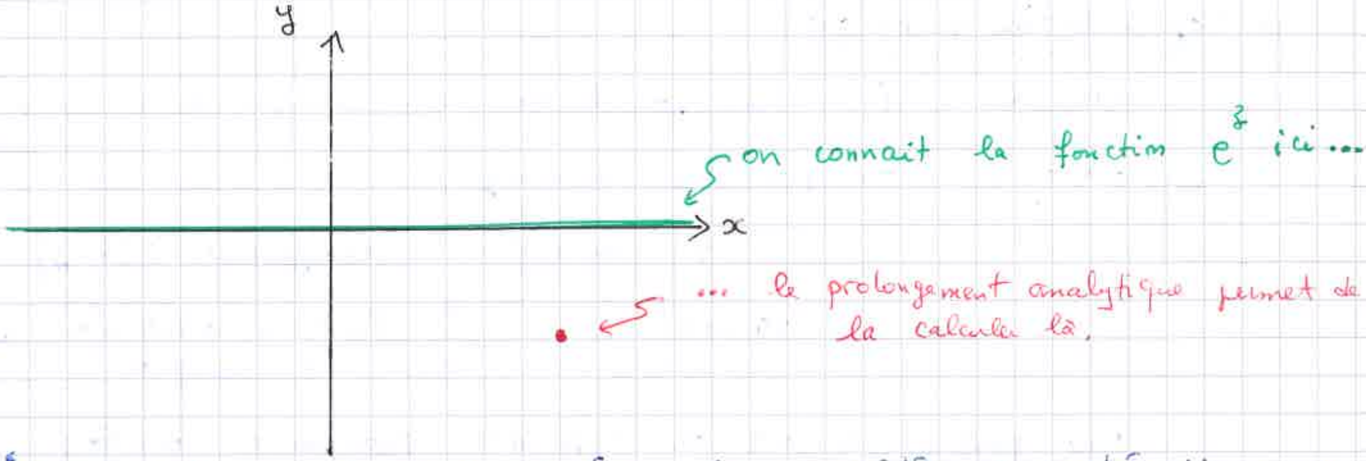
$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ car la série converge dans tout } \mathbb{R}$$

(le rayon de convergence est infini)

... d'où l'idée de définir $\exp z$ à partir de la même série :

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ce qui est un prolongement analytique de l'expression réelle



Le prolongement doit vérifier les propriétés caractéristiques de l'exponentielle, en particulier :

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

(on peut le démontrer à partir du développement en série).

Avantage : on peut calculer e^z partout puisque la série ne fait intervenir que des produits et des additions de complexes (aucune fonction transcendante requise)

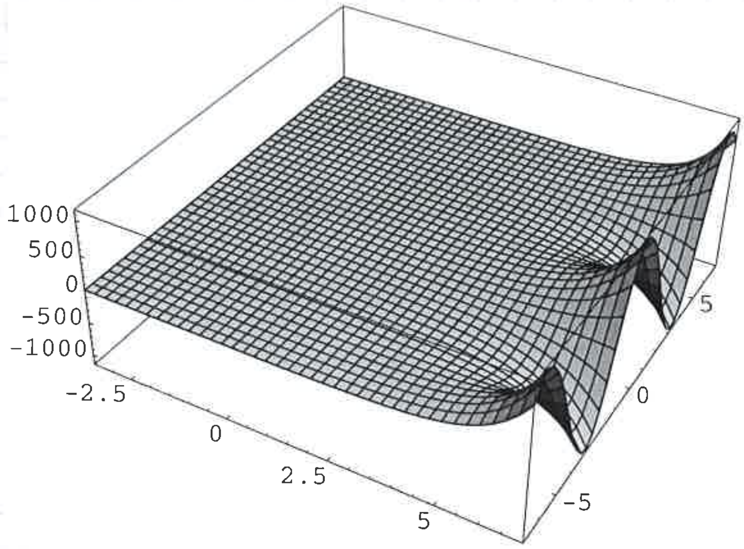
Graphe de l'exponentielle : $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$

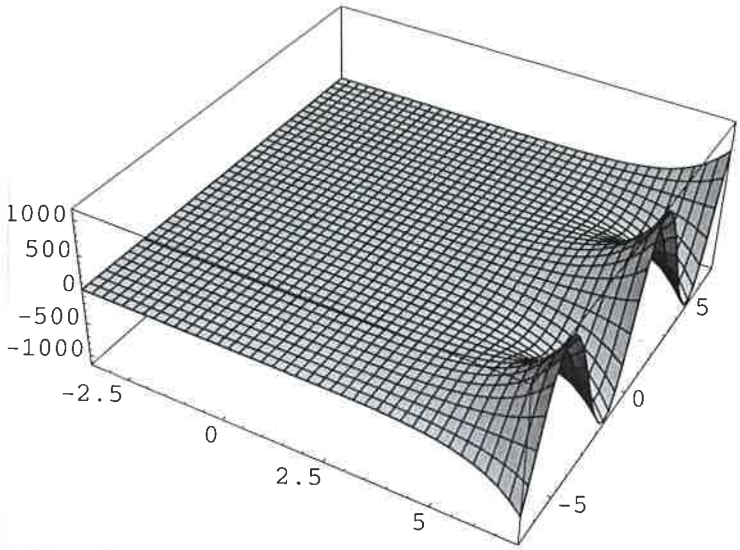
Ce résultat peut aussi s'obtenir avec la série

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots = 1 + x + iy + \frac{x^2-y^2}{2} + 2ixy + \dots$$

$$= \underbrace{1 + x + \frac{x^2-y^2}{2} + \dots}_{e^x \cos y} + i \underbrace{(2xy + \dots)}_{e^x \sin y}$$

... mais c'est long !





* Fonctions analytiques : définition

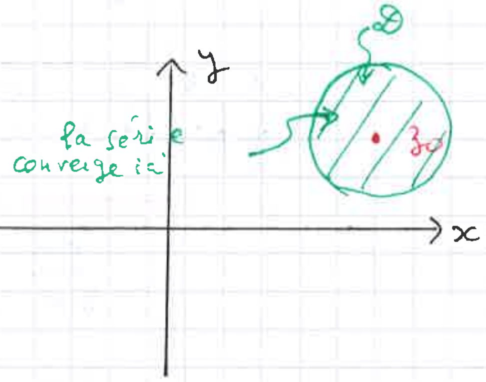
On appelle **fonction analytique** toute fonction qui peut se développer en série

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

ex : e^{z}, $\cos z$, z^2

De manière équivalente, on appelle **fonction analytique dans un domaine $\mathcal{D}$ autour d'un point z_0** toute fonction qui peut se développer en série autour du point z_0, la série convergeant seulement dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan complexe

$$f(z_0 + \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \quad ; \quad \eta \in \mathcal{D}$$

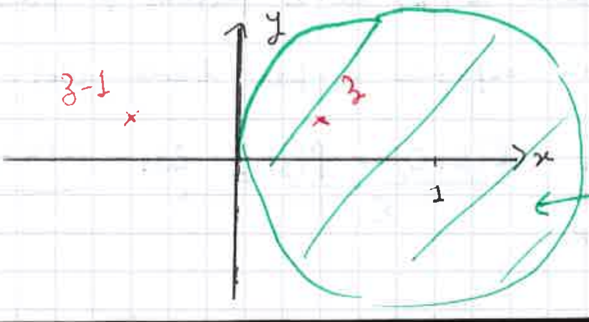


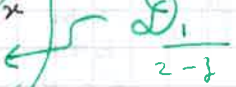
ex : $$\frac{1}{1-z} = \sum z^n \quad \text{si } |z| < 1$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z'} \quad \text{avec } z' = z - 1$$

$$= \sum z'^n \quad \text{si } |z'| < 1 \Rightarrow |z-1| < 1$$

cercle de rayon 1 centré sur 1





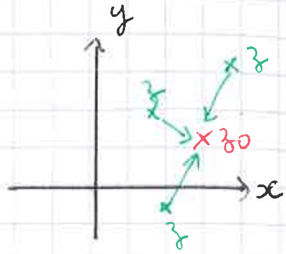
3) Fonctions holomorphes

C'est la généralisation des fonctions dérivables.

La dérivée complexe est définie comme

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

$\forall$ la manière d'approcher z_0 !



$f(z) \to f(z_0)$ $\forall$ le chemin suivi

Une fonction dérivable en tout point d'un domaine $\mathcal{D}$ est dite holomorphe dans ce domaine

On peut démontrer facilement que toute fonction analytique est holomorphe et que la réciproque est vraie !

$\Rightarrow$ toutes les fonctions définies comme des séries sont dérivables.
En particulier :

$$(e^z)' = e^z$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

etc... les règles habituelles s'appliquent.

* Conditions de Cauchy

une fonction $\underline{\underline{\text{holo.}}}$ $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) \qquad \text{si } z = x + iy.$$

u et v sont deux fonctions qui ne sont pas complètement indépendantes ; elles sont reliées par les conditions de Cauchy :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}}$$

on montre qu'une fonction satisfaisant aux cond. de Cauchy est holomorphe

holomorphe $\Longleftrightarrow$ Cond. de Cauchy

<u>dém :</u> on calcule $f'(z)$ de 2 façons $\neq$ puis on égalise.

> façon 1 : on approche z par l'axe réel.

$$f'(z) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon} \frac{u(x+\varepsilon, y) - u(x,y) + i\left(v(x+\varepsilon,y) - v(x,y)\right)}{\varepsilon}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

> façon 2 : on approche z par l'axe imaginaire : $\eta = i\varepsilon$

$$f'(z) = \lim_{\eta} \frac{f(z+\eta) - f(z)}{\eta} = \lim_{\eta} \frac{u(x, y+\varepsilon) - u(x,y)}{i\varepsilon} + \frac{i}{i\varepsilon}\left(v(x,y+\varepsilon) - v(x,y)\right)$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

> l'égalisation donne les conditions de Cauchy.

question : si on a 2 fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ et qu'on forme la somme

$$u(x,y) + i\,v(x,y)$$

qu'obtient-t-on ?

=) réponse : une fonction de z et $\bar{z}$ car le changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ est le + général

=) les fonctions $f(z$ seul$)$ sont donc des cas particuliers

Exemples :

- $u(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad v(x,y) = 2ixy$

  $u + iv$ est-elle une fn holomorphe ?

  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$ ok

  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$ ok

  =) oui

  en fait c'est la fonction $f(z) = z^2$

- $u(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad v(x,y) = 0$

  à l'évidence $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ donc Non.

  en fait c'est la fonction $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$

On montre aussi qu'une fonction holomorphe de z vérifie

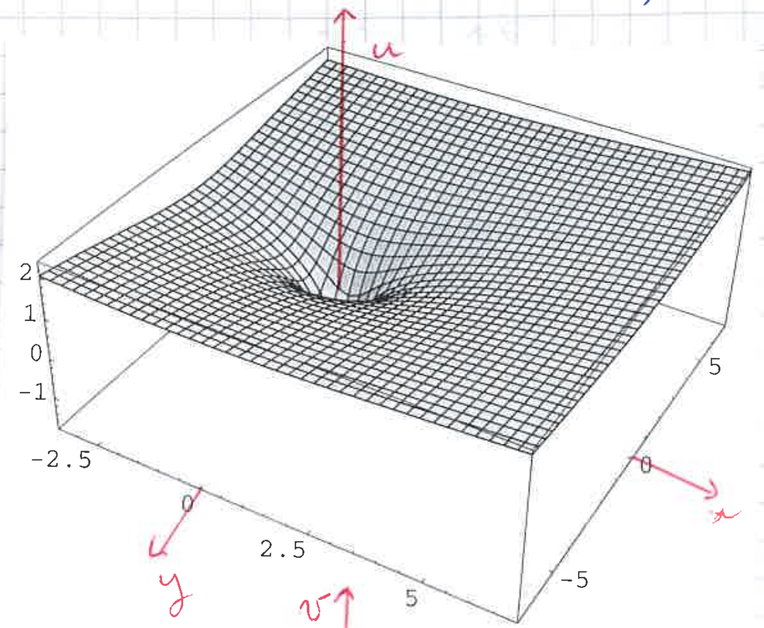
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (\text{donc } f \text{ indep. de } \bar{z})$$

4) Fonctions multiformes - Coupures

* Fonction ln z

ln z défini comme l'inverse de la fonction exp.
en particulier

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$$



En posant $z = \rho e^{i\theta}$

on a

$$\ln z = \ln \rho + i\theta \qquad (\rho \neq 0)$$

2 propriétés particulières :

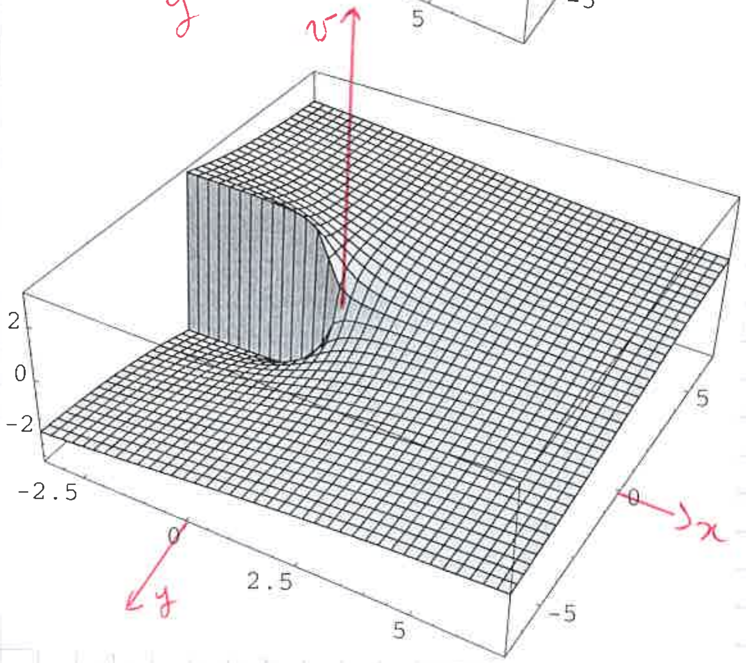
i) Ln z a plusieurs déterminations

car l'argument est défini à $2k\pi$ près

$$\Rightarrow \ln z = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\Downarrow$

fonction multiforme



ii) ln z s'identifie bien à ln x si $\theta \in]-\pi, \pi[$ pour $x > 0$.

Pour $x < 0$: limite $\theta = \pi - \varepsilon$ $\neq$ limite $\theta = \pi + \varepsilon$

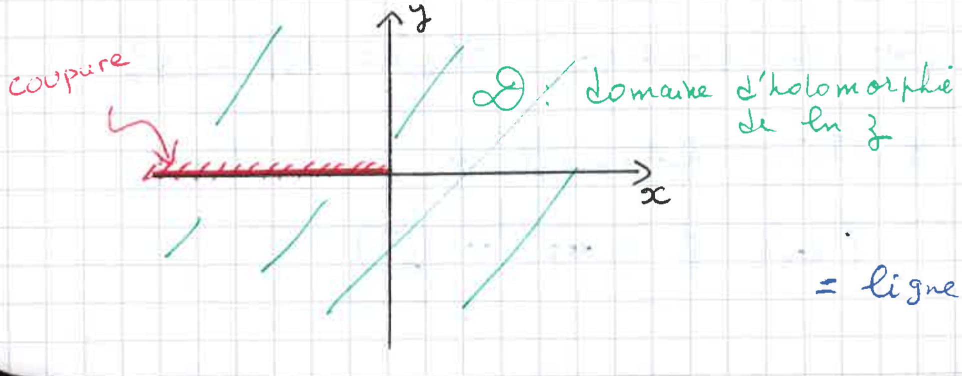
$\Downarrow$

fonction pas analytique au voisinage de l'axe réel < 0.

D'où l'idée d'exclure la demi-droite réel négative et de définir le domaine

$$\mathcal{D} = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$$

dans lequel la fonction est analytique



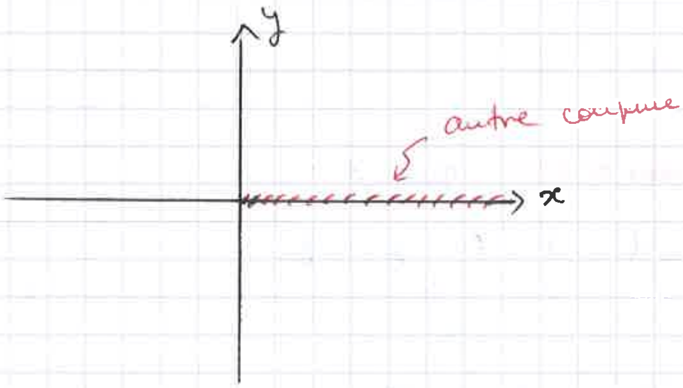
on dit qu'on fait une coupure [de branche] du plan complexe.

$\equiv$ ligne de changement de date

= ligne continue de singularités.

▶ l'on peut en fait placer la coupure où l'on veut ; il suffit de changer les conventions de définition de θ

par exemple si on définit θ entre 0 et 2π alors Arg z est singulier au voisinage de $\theta = 0$ et la coupure est l'axe réel > 0.

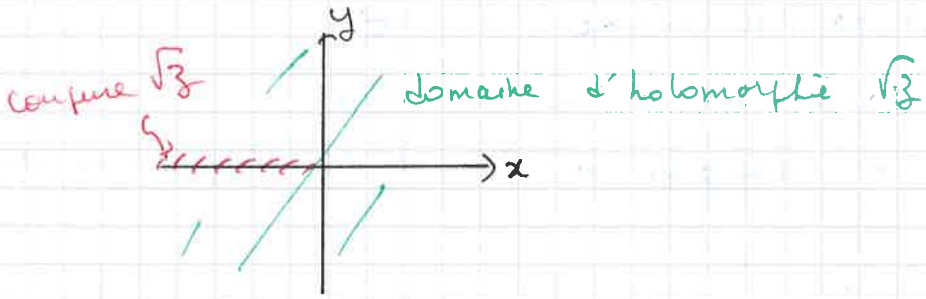


mais alors ce log ci ne s'identifie pas au log traditionnel défini sur $\mathbb{R}_+^*$ et singulier sur $\mathbb{R}_-$

* fonction $\sqrt{z} = z^{1/2}$

$$z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln z} = e^{\frac{1}{2}\ln \rho}\, e^{\frac{1}{2}i\theta} = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

avec $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$ on a une singularité pour $\theta = \pi$



idem pour z^{α}, z^{i} ...

5) Pôles

Ce sont les singularités des fonctions. On ne parle de pôles que quand il s'agit de singularités isolées.

On en distingue 2 types.

* les Pôles

une fonction f a un pôle en z_0 si $|f(z)| \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty$

Ex: $\frac{1}{z}$ en 0

$\frac{1}{\sin z}$ en $z = k\pi$

on parle de pôle d'ordre n si $\lim (z-z_0)^n f(z) \to$ Cte $\neq 0$

... autrement dit : f se comporte comme $\frac{\text{cte}}{(z-z_0)^n}$ au voisinage de z_0

ex: $\dfrac{1}{z^2+a^2}$ a 2 pôles d'ordre 1 en $\pm ia$ $(a \in \mathbb{R})$

$\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ a un pôle d'ordre 2 en $z_0 = 1$

* les singularités essentielles

On parle de singularités essentielles quand :

→ la fonction n'a pas de limite en $z \to z_0$

ex: $e^{1/z}$

si $z \in \mathbb{R}$ alors $f \underset{z \to 0}{\to} \infty$

si $z \in i\mathbb{R}$ alors $e^{-\frac{i}{|z|}} = \cos \frac{1}{|z|} - i \sin \frac{1}{|z|}$

n'a pas de limite en 0
(oscillations)

→ la fonction n'est pas analytique, ex e^{-1/z^2}

pour $z \in \mathbb{R}$ toutes ses dérivées sont nulles

⇒ impossible de faire un développement en série !

II - La fonction $\Gamma(z)$

mathworld.wolfram.com / GammaFunction.html

1) Définition.

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt} \qquad t \in \mathbb{R}$$

définie pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\frac{1}{2}$ plan complexe. Sinon l'intégrale diverge.

2) Propriétés de base

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1.$

- $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} . t^z\, dt$ Intg par parties

$$= \underbrace{\Big[- e^{-t} t^z\Big]_0^\infty}_{\text{nul aux bornes}} - - \int_0^\infty z\, t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

$$= z\,\Gamma(z)$$

d'où la propriété fondamentale $\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$

d'où il est facile de voir que

$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma(3) = 2$
$\Gamma(4) = 3 \times 2$
$\Gamma(5) = 4 \times 3 \times 2$
$\vdots$
$\Gamma(n+1) = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 = n!$

$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$ $\quad n$ entier > 0

on parle parfois de la fonction

$$z! = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt$$

définie dans le $\frac{1}{2}$ plan $\mathrm{Re}\, z > -1$

Cette formule permet de faire un prolongement analytique de $\Gamma(z)$ dans le ~~$\frac{1}{2}$~~ plan complexe tout entier (sauf les entiers ≤ 0)

En effet :

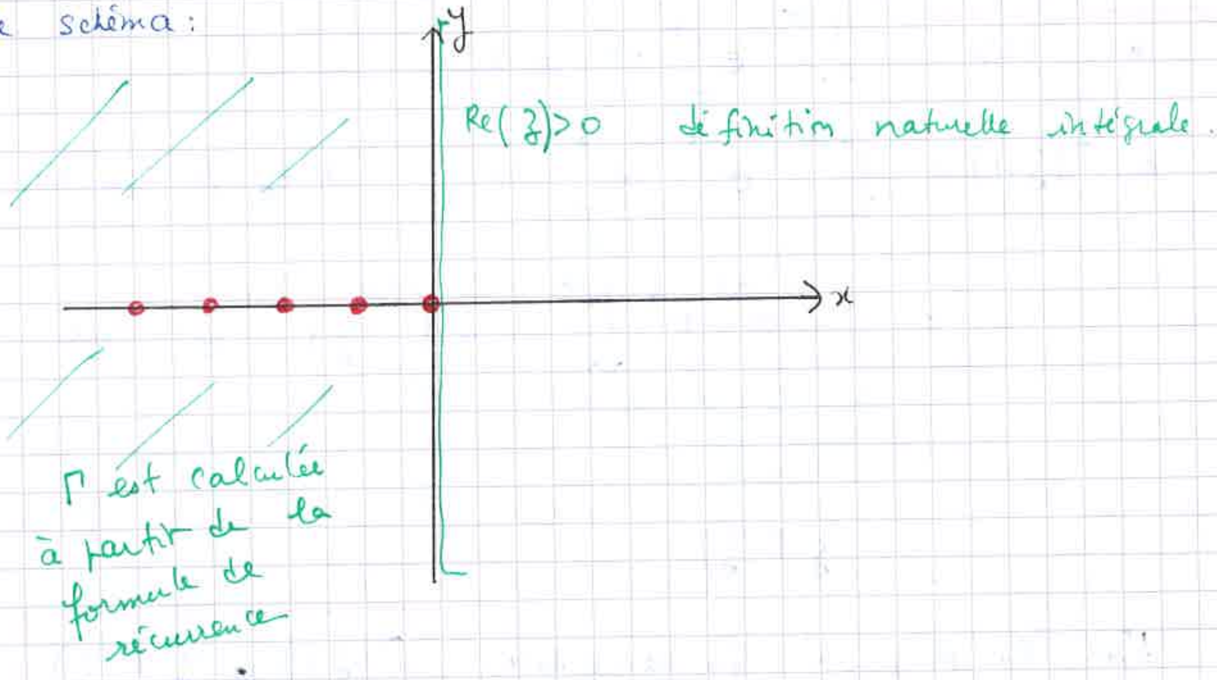
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\cancel{\Gamma(z+1)}\,\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+3)\,\cancel{\Gamma(z+2)}}{z(z+1)(z+2)}$$

Ainsi :

$$\Gamma(-1,5) = \frac{\Gamma(0,5)}{-1,5}$$

Mais : $\Gamma(-1) = \dfrac{\Gamma(0)}{-1}$ qui diverge car $\Gamma(0) = \dfrac{\Gamma(1)}{0}$

d'où le schéma :

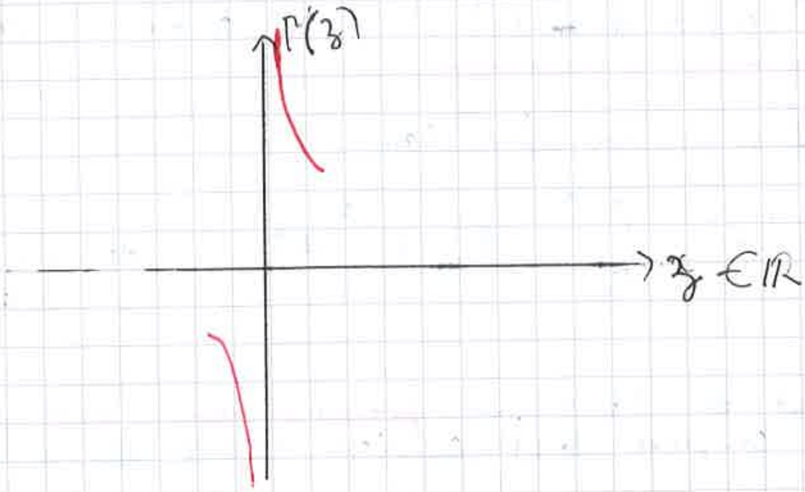


3) Valeurs particulières - Graphe

$*$ Comportement à l'origine

$$\left.\begin{array}{l} Re(z) > 0 \\ z \to 0 \end{array}\right. \Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \simeq \frac{1}{z}$$

Idem pour $Re(z) < 0$ puisque Γ est continue en 1



* comportement en $z = -1$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \to \frac{\Gamma(1)}{-(z+1)} \simeq \frac{-1}{z+1}$$

au voisinage de $z = -n$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{\underbrace{z(z+1)\cdots(z+n)}_{n+1 \text{ termes}}} \simeq \frac{\Gamma(1)}{(z+n)[z(z+1)\cdots(z+n-1)]}$$

$$= \frac{1}{(z+n)(-n)(-n+1)\cdots(-1)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$$

on peut montrer ainsi le comportement alterné au voisinage des pôles entiers pairs / impairs.

* Demi-entiers :

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt$$

$$u^2 = t \Rightarrow u = t^{1/2}$$

$$2u\, du = dt$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \cancel{u^{-1}}\, e^{-u^2}\, 2\cancel{u}\, du$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

d'où $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

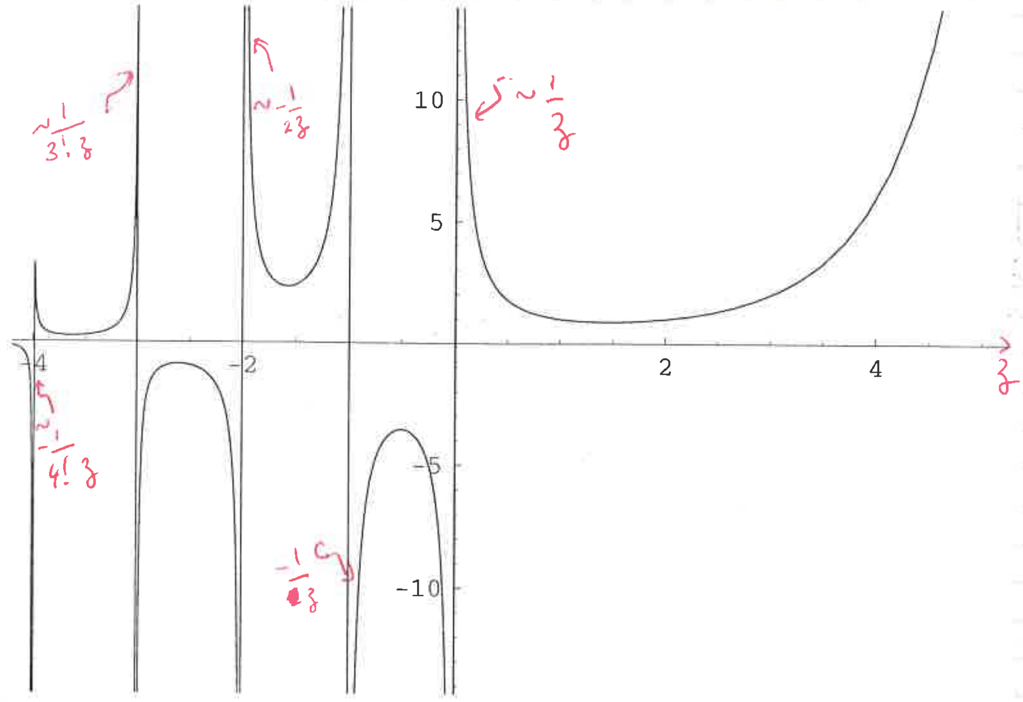
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$

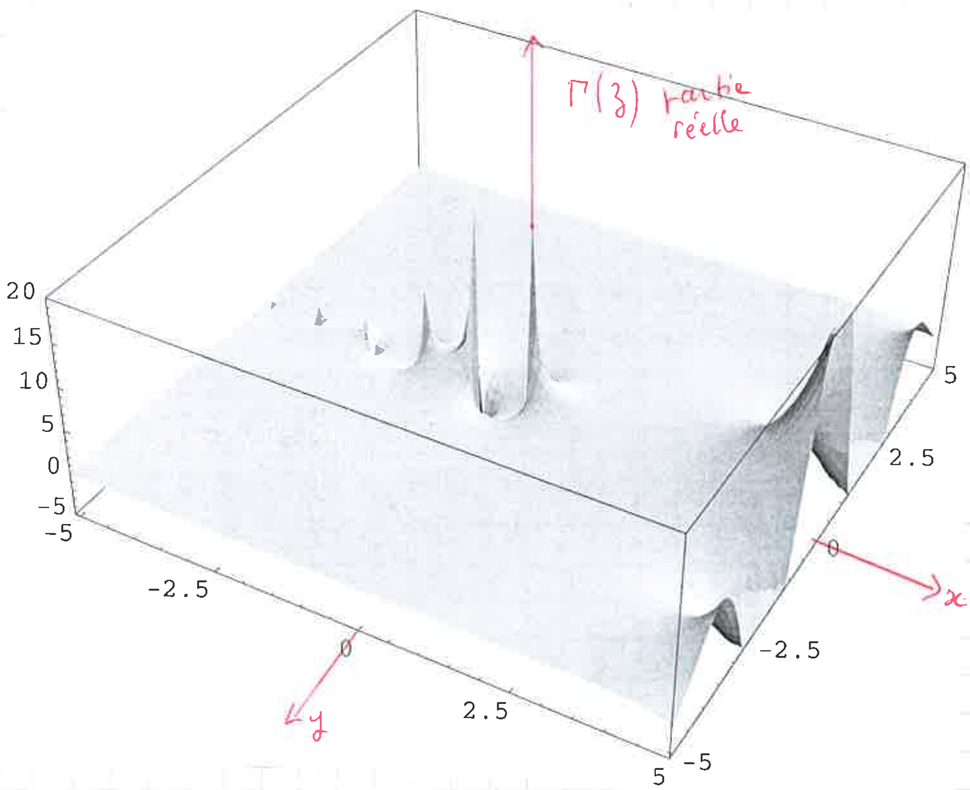
$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

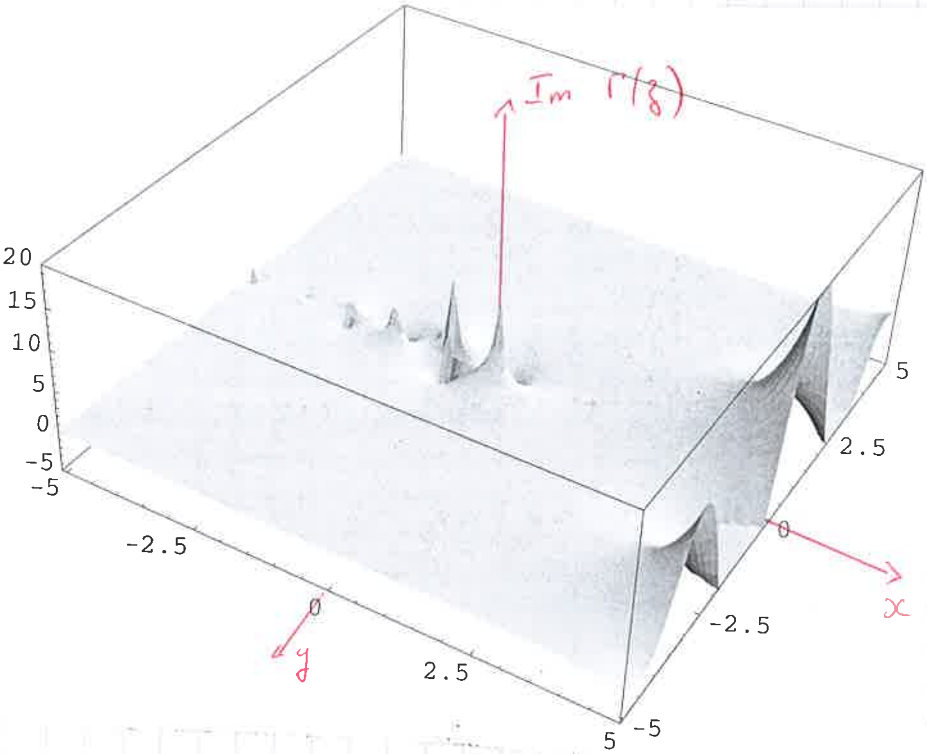
$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad \text{pour } n > 1$$

* Graphe de Γ

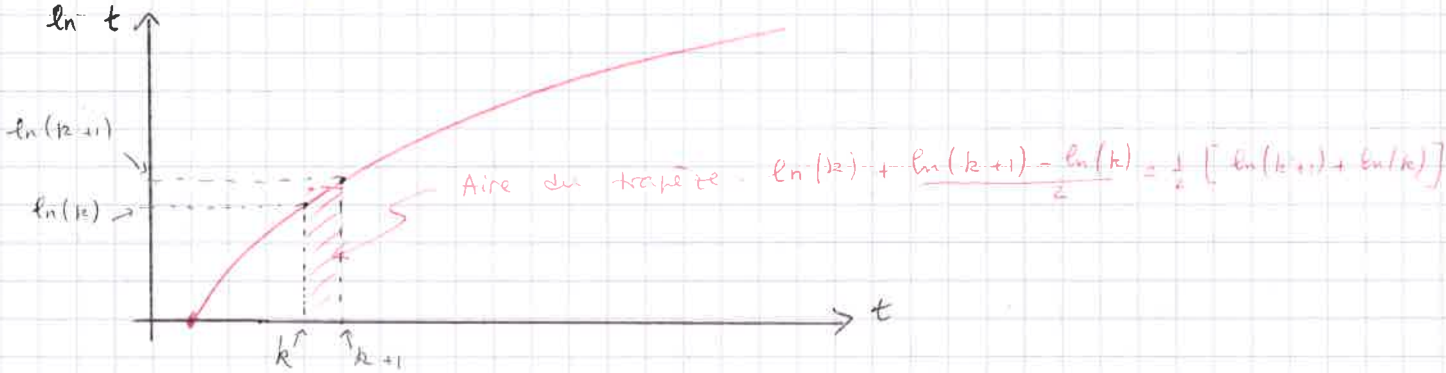






4 - Développement asymptotique

On peut avoir facilement un développement asymptotique de $\Gamma(x)$ en écrivant l'intégrale de $\ln(t)$ par la méthode des trapèzes :



On part de

$$\int_1^n \ln(t)\,dt = \left[t \ln t - t\right]_1^n = n\ln(n) - n + 1$$

avec la méthode des trapèzes, l'intégrale s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\ln(k+1) + \ln(k)\right) + \mathcal{E} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_1^{n-1} \ln(k+1)}_{\sum \ln = \ln(\Pi)} + \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \ln(k) + \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\ln(n!) + \frac{1}{2}\ln((n-1)!) + \varepsilon = \frac{1}{2}\ln(n(n-1)!) + \frac{1}{2}\ln((n-1)!) + \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\ln n + \ln((n-1)!) + \varepsilon$$

d'où l'approximation : $n\ln(n) - n + 1 \simeq \frac{1}{2}\ln(n) + \ln((n-1)!) + \varepsilon$

qui donne $(n-1)! \simeq \frac{n^n}{\sqrt{n}} e^{-n}\sqrt{e}\, e^{-\varepsilon}$

Soit
$$\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to\infty}{\simeq} \frac{n^n}{\sqrt{n}} e^{-n} e^{(\varepsilon+\frac{1}{2})}}$$

qu'on prolonge analytiquement sur $\mathbb{R}$

cette expression simple est cependant plus faible que la formule de Stirling (utilisée notamment en physique stat.) mais dont la démonstration est plus laborieuse :

$$\Gamma(x \cancel{+1}) \simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}}\, x^{x}\, e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \cdots\right)$$

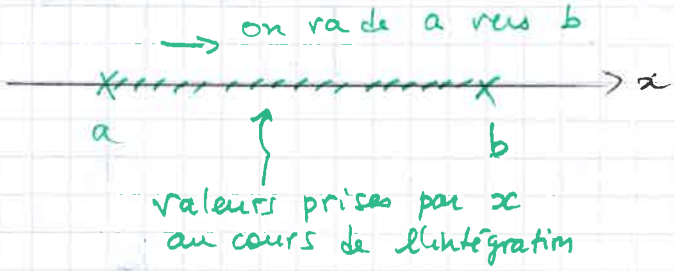
Chap 2 - Intégrales dans le plan complexe

I - Intégrales curvilignes

1) Chemin dans $\mathbb{C}$

Une intégrale réelle est du type

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



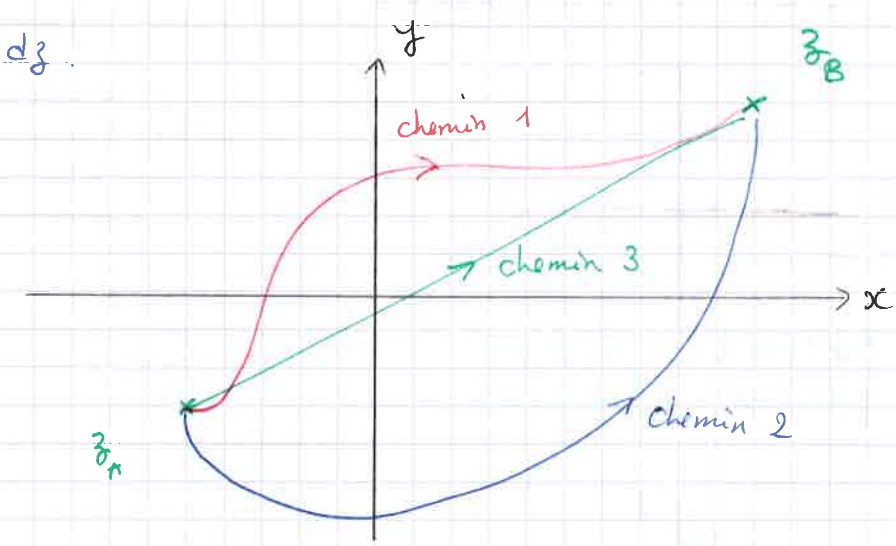
l'intervalle $[a,b]$ est celui des valeurs prises par x

On le parcourt de a vers b
il y a 1 seule façon d'aller de a vers b.

→ de gauche à droite si $b > a$
→ de dte à gauche si $a > b$.

Une intégrale complexe sera, par extension, du type

$$I = \int_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz$$



Pb à 2 dim :
on a plusieurs façons d'aller de z_A à z_B

⇒ nécessité de définir un **Chemin d'intégration C**

qui sera une courbe de dimension 1 représentant l'ensemble des valeurs prises par z au cours de l'intégration. Le chemin doit être continu de z_A vers z_B.

* Représentation paramétrique

Le chemin est une courbe dans le plan (x,y).
Cette courbe est caractérisée

→ par une équation de type $y = g(x)$
ex : $y = x$ définit la 1ère diagonale

→ par une représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

on préfèrera la forme paramétrique.

ex : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$ représente le cercle de rayon a quand t va de 0 à 2π.

Le paramètre doit être choisi de manière à ce que

$$z(t) = x(t) + i\, y(t) = z_A \quad \text{pour} \quad t = t_1$$
$$z(t) = z_B \quad \text{pour} \quad t = t_2$$

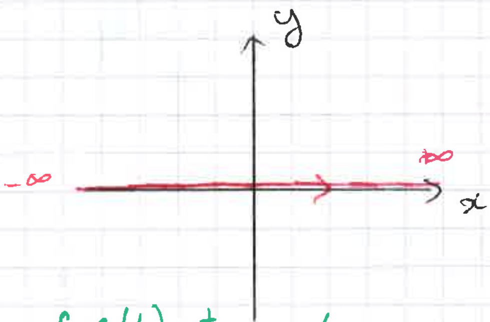
Dans ce cas :

$$\int_{z_A}^{z_B} f(z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\, d[z(t)]$$

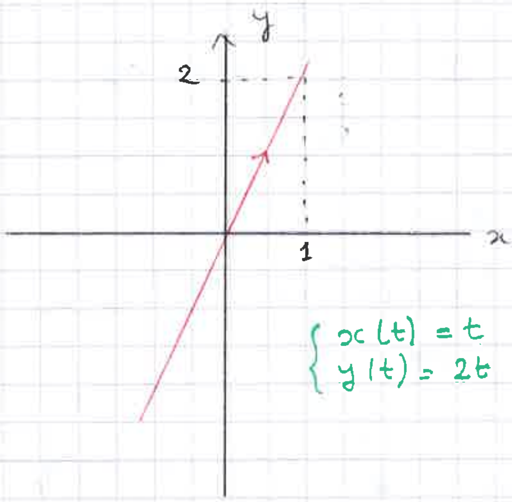
$$\boxed{\int_C f(z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\, z'(t)\, dt}$$

$\Rightarrow$ impose la condition que $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables

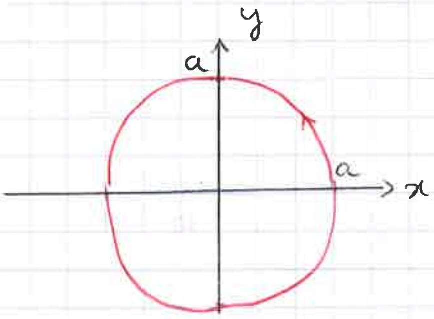
Exemples de paramétrages :



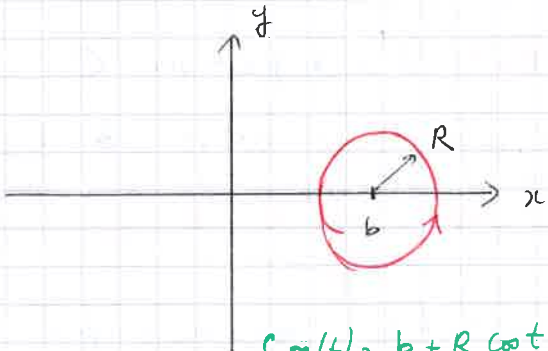
$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}$ $\quad t_1 = -\infty$, $t_2 = +\infty$



$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases}$ $\quad t_1 = -\infty$, $t_2 = +\infty$



$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases}$ $\quad t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$

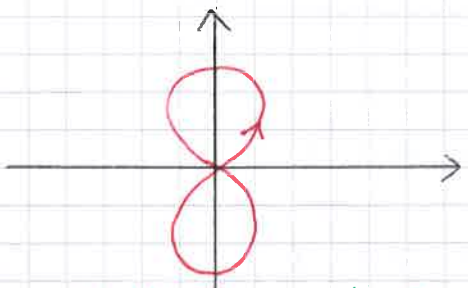


$\begin{cases} x(t) = b + R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}$ $\quad t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$

NB : si t va de t_1 à t_2 ça définit un sens de parcours du chemin.

$$\boxed{\int_C f(z)\, dz = -\int_{-C} f(z)\, dz}$$

... on peut aussi avoir des chemins qui se recoupent :



$$\begin{cases} x = a \sin 2t \\ y = b \cos t \end{cases} \qquad t_1 = 0 \quad t_2 = 2\pi$$

une courbe qui ne se recoupe pas est appellée arc de Jordan

Dans ce cas $z(t)$ est une bijection :

$$t_1 \neq t_2 \iff z(t_1) = z(t_2)$$

* La longueur d'un arc élémentaire dL défini par

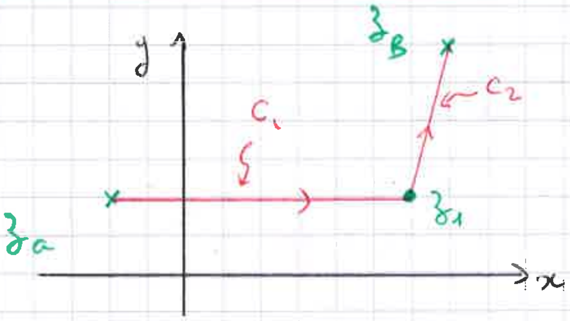
$$t_2 = t_1 + dt \Rightarrow \begin{cases} x(t_2) = x(t_1) + x'(t_1)\,dt \\ y(t_2) = y(t_1) + y'(t_1)\,dt \end{cases}$$

et $dL = \oint |dz| = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,|dt|$

$\Rightarrow$ La longueur d'un chemin est défini par

$$\boxed{L = \int_C |dz| = \int_C \sqrt{x'(t) + y'(t)}\,|dt|}$$

* Arcs définis par morceaux :



la linéarité de l'intégrale permet d'écrire

$$\boxed{\int_{C_1 \cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz}$$

2) Intégrales sur un chemin.

L'intégrale $I = \displaystyle\int_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz$

peut se mettre sous la forme de 2 intégrales réelles.

En posant

$$f = u + iv \quad \text{et} \quad dz = dx + i\,dy$$

on a : $I = \int_c f(z)\, dz = \int_c (u\,dx - v\,dy) + i \int_c u\,dy + v\,dx$

* <u>Petite remarque</u>

Soit $\cancel{A} = \int_c u\,dx - v\,dy \quad = \operatorname{Re} I$

$B = \int_c u\,dx + v\,dy \quad = \operatorname{Im} I.$

Soit le vecteur :

$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \qquad \vec{dl} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \quad A = \int_c \vec{V}_1 \cdot \vec{dl} \qquad$ et $\qquad B = \int_c \vec{V}_2 \cdot \vec{dl}$

$\Rightarrow$ les 2 intégrals réells sont en fait des circulations de vecteurs

or les propriétés suivants existent :

$\int_A^B \vec{V}_1 \cdot \vec{dl}$ indep. du chemin suivi

$\Leftrightarrow \quad \vec{V}_1 = \vec{\operatorname{grad}}\, F \qquad \vec{V}_1$ dérive d'un potentiel

$\Leftrightarrow \quad \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{V}_1 = \vec{0}$

cf. cours électrostatique
$\vec{V}_1$ champ électrique.

$$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V_{1z}}{\partial y} - \dfrac{\partial V_{1y}}{\partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial V_{1x}}{\partial z} - \dfrac{\partial V_{1z}}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial V_{1y}}{\partial x} - \dfrac{\partial V_{1x}}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$\vec{V}_1$ est à 2 dim $\Rightarrow V_{1z} = 0$

$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow V_1$ indep de z

d'où $\quad \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{V}_1 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$

de même $\quad \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{V}_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}$

or pour une fonction holomorphe $f(z) = u + iv$

les conditions de cauchy imposent $\quad \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{V}_1 = \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{V}_2 = \vec{0}$

par conséquent les intégrales

$$\int_c u\,dx - v\,dy \quad \text{et} \quad \int_c u\,dy + v\,dx$$

et donc l'intégrale

Théorème de Cauchy

$$\boxed{\int_c f(z)\,dz \text{ est indépendante du chemin suivi pour } f \text{ holomorphe sur } C}$$

elle ne dépend que des points de départ et d'arrivée.

Une conséquence immédiate est :

$$\boxed{\oint_c f(z)\,dz = 0}$$

pour f holomorphe dans le domaine délimité par le contour.

dém :

$$\oint_c f(z)\,dz = \oint_c \vec{V_1} \cdot \vec{dl} + i \oint_c \vec{V_2} \cdot \vec{dl}$$

$$= \iint_{S(c)} \vec{rot}\,\vec{V_1} \cdot \vec{ds} + i \iint_{S(c)} \vec{rot}\,\vec{V_2} \cdot \vec{ds}$$

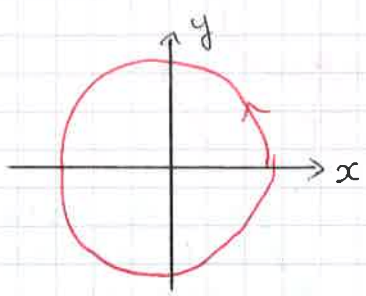
$$= 0 \quad \text{quand} \quad \vec{rot}\,\vec{V}_{1,2} = \vec{0} \text{ en tout point de } S(c)$$

$\Leftrightarrow$ les conditions de Cauchy sont vérifiées en tout point de $S(c)$

• **Exemple :**

Soit $f(z) = z^2$ à intégrer sur le cercle de rayon 1.

z^2 est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.



paramétrage :

$x(t) = \cos t$ $\quad t_1 = 0$

$y(t) = \sin t$ $\quad t_2 = 2\pi$

$$z^2(t) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$= \underbrace{\cos^2 t - \sin^2 t}_{} + 2i \sin t \cos t$$

$$= \cos 2t + i \sin 2t$$

$$= e^{2it} \quad ; \quad z'(t) = i e^{it}$$

$$\oint f(t)\,dt = \int_{t=0}^{2\pi} i e^{3it}\,dt = 0$$

- Autre exemple

$f(z) = \frac{1}{z}$ même chemin, même paramétrage $z(t) = e^{it}$

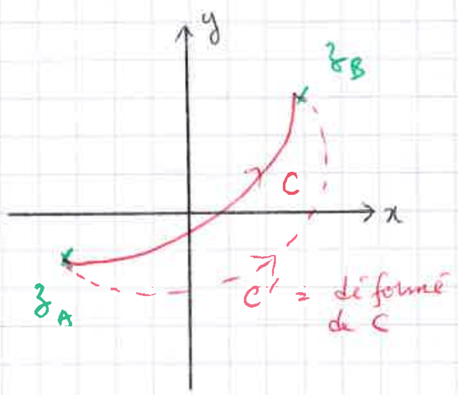
$$\frac{1}{z(t)} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \cos t - i \sin t = e^{-it}$$

$$z'(t) = i e^{it} \Rightarrow \oint f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} i e^{it} \cdot e^{-it}\,dt$$

$$= 2i\pi \neq 0$$

car f a une singularité en O.

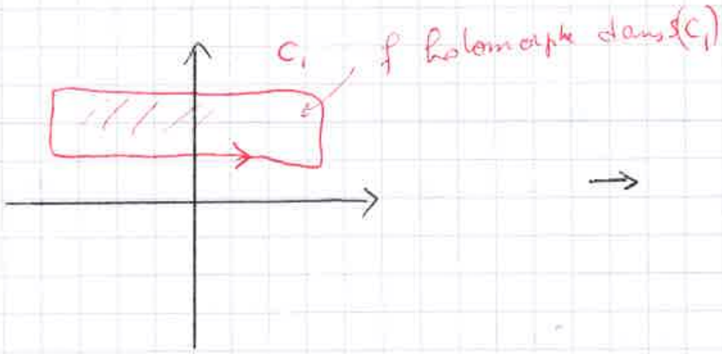
Autre
* Conséquence du théorème de Cauchy



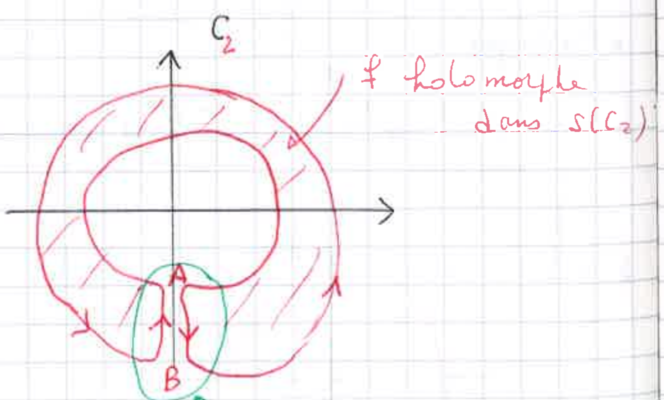
pour une fonction holomorphe f on peut déformer à loisir le contour C tant qu'on ne croise pas de singularité.

→ l'intégrale a même valeur sur C et C'.

On peut même déformer un contour fermé :

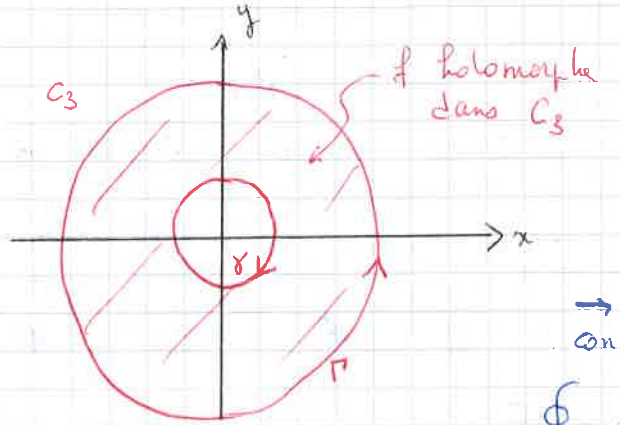


→



quand les lèvres se joignent, l'intégrale du bord gauche s'annule avec celle du bord droit

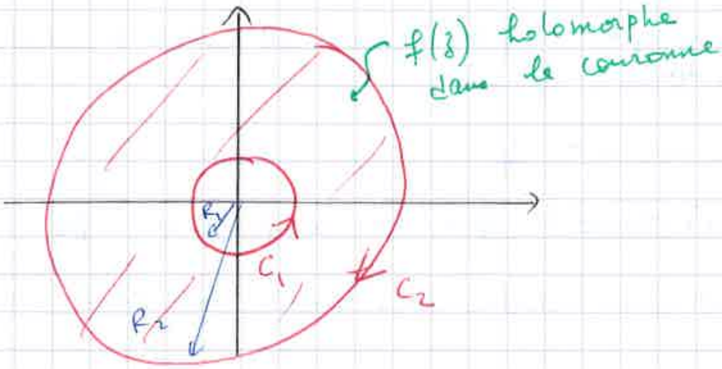
→



→ on peut obtenir des contours multiplement connexe.

$$\oint_{C_3} = \oint_{\Gamma} + \oint_{\gamma} = 0$$ si f holomorphe dans la couronne entre γ et Γ.

application à la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$.



on en déduit :

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z} = - \oint_{C_2} \frac{dz}{z}$$

$$= \oint_{-C_2} \frac{dz}{z}$$

$-C_2$ est le cercle de rayon R_2 parcouru dans le même sens que C_1

$\Rightarrow \oint_{C(0,R)} \frac{dz}{z}$ est indépendant du rayon du cercle

Généralisation :

Soit une fonction $f(z)$ ayant une singularité isolée en z_0 et holomorphe partout ailleurs ; soit γ un cercle entourant z_0

alors $\oint_\gamma f(z)\, dz$ est indépendante du rayon de γ

II - Théorème des résidus

1) Résidus

Soit f une fonction holomorphe ayant une singularité isolée en z_0. Soit γ un contour fermé

→ entourant z_0

→ n'entourant que la singularité z_0

→ parcouru une fois dans le sens trigo

on appelle **résidu de f au point z_0**

l'intégrale

$$\boxed{\mathrm{Res}\,[f, z_0] = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma f(z)\,dz.}$$

* Calcul du résidu dans le cas d'un pôle simple

Soit f une fonction ayant un pôle simple en z_0

$\Rightarrow$ au voisinage de z_0, $f(z) \simeq \dfrac{cte}{z-z_0}$

on introduit la fonction

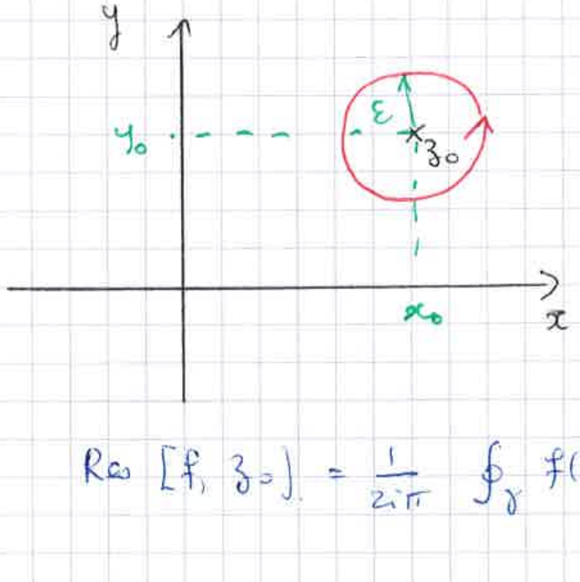
$$\varphi(z) = (z-z_0)\, f(z) \quad \text{qui est régulière}$$

au point z_0 :

$$\varphi(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)\, f(z)$$

c'est la fameuse "cte"

on va calculer le résidu en prenant pour γ un cercle de rayon ε avec $\varepsilon \ll |z_0|$ centré sur z_0.



paramétrage de γ :

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \cos t \qquad t_1 = 0$$

$$y(t) = y_0 + \varepsilon \sin t \qquad t_2 = 2\pi$$

$$\Rightarrow z = z_0 + \varepsilon e^{it}$$

$$\mathrm{Res}\,[f, z_0] = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{\varphi(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\underbrace{z - z_0}_{\varepsilon e^{it}}} \cdot \underbrace{z'(t)}_{i\varepsilon e^{it}} \, dt$$

or $\varphi(z_0 + \varepsilon e^{it}) \simeq \varphi(z_0)$

$$\simeq \frac{1}{2i\pi} \varphi(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it} \, dt = \varphi(z_0)$$

d'où l'expression du résidu dans le cas d'un pôle simple :

$$\boxed{\mathrm{Res}\,[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z - z_0) \right]}$$

* Pour un pôle d'ordre m

même démarche, on pose $\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z)$, régulière

on développe $\varphi(z)$ en série de Taylor :

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + (z-z_0)\varphi'(z_0) + \dots + \frac{(z-z_0)^p}{p!}\varphi^{(p)}(z_0) + \dots$$

$$\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^p}{p!} \varphi^{(p)}(z_0)$$

Puis on intègre sur le contour γ du § précédent.

$$\mathrm{Res}\,[f, z_0] = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{\varepsilon^m e^{ipt}} \cdot i\varepsilon e^{it} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{1-m} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(p)}(z_0)}{p!} \underbrace{(z-z_0)}_{\varepsilon e^{it}}{}^p$$

$$= \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{1-m} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \frac{\varphi^{(p)}(z_0)}{p!} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(1+p-m)t} \, dt}_{\substack{\text{nul si } 1+p-m \neq 0 \Rightarrow p = m-1 \\ 2\pi \text{ sinon}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \varphi^{(m-1)}(z_0) \frac{1}{(m-1)!} 2\pi = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

$$\boxed{\mathrm{Res}\,[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)(z-z_0)^m}{(m-1)!} \right]^{(m-1)}}$$

* Exemples

- $f(z) = \frac{1}{z}$ pôle d'ordre 1 en 0

  $\varphi(z) = z\, f(z) = 1 \Rightarrow \varphi(z_0) = 1 \Rightarrow \text{Res} = 1$

- $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ pôles d'ordre 1 en $\pm ia$

  $+ia$: $\varphi(z) = \frac{(z - ia)}{z^2 + a^2} = \frac{1}{z + ia} \Rightarrow \varphi(z_0) = \frac{1}{2ia} \Rightarrow \text{Res} = \frac{1}{2ia}$

  $-ia$: $\text{Res} = \frac{-1}{2ia}$

- $f(z) = \cot g\, z$ pôles d'ordre 1 en $z = n\pi$

  $\varphi(z) = (z - n\pi) \cot g\, z = \frac{(z - n\pi) \cos z}{\sin z}$

  quand $z \to n\pi$: $\varphi(n\pi) = \frac{(z - n\pi)\ (-1)^n}{\sin(z - n\pi + n\pi)}$

  $$\varphi(n\pi) = \lim \frac{(z - n\pi)\ (-)^n}{\underbrace{\sin(z - n\pi)}_{z - n\pi} \underbrace{\cos n\pi}_{(-)^n} + \underbrace{\cos(z - n\pi)}_{(-)^n} \underbrace{\sin(n\pi)}_{0}}$$

  $= 1$

  $\Rightarrow \text{Res} = 1$

- fraction, polynome au dénominateur :

  $$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

  $A(z)$: fonction régulière

  $B(z)$: ~~pôles~~ racines simples en z_k

  $B(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$

  $\varphi(z_k) = A(z_k) \lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k)}{B(z)}$ $\begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ règle de l'Hôpital

  $= A(z_k) \lim_{z \to z_k} \frac{1}{B'(z)} = \frac{A(z_k)}{B'(z_k)}$

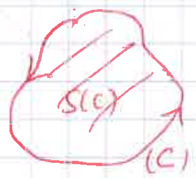
  $\Rightarrow \text{Res} = \frac{A(z_k)}{B'(z_k)}$

  ex : $\cot g\, z = \frac{\cos z}{\sin z} \to \frac{A(z)}{B'(z)} = \frac{\cos}{\cos} = 1$

2) Théorème des résidus

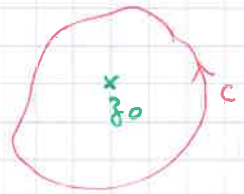
Il concerne l'intégrale d'une fonction sur un contour fermé entourant plusieurs singularités.

→ Cas de 0 singularités : f holomorphe sur $S(C)$



$$\rightarrow \oint_C f(z)\,dz = 0$$

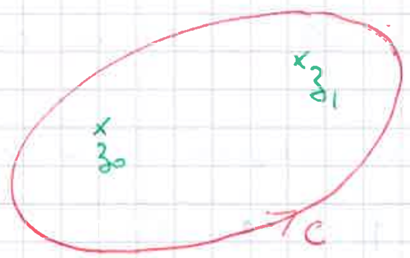
→ Cas de 1 singularité : C entoure la singularité dans le sens +



$$\rightarrow \oint f(z)\,dz = 2i\pi \ \mathrm{Res}\,[f, z_0]$$

car $\oint$ est indép. du rayon de C.

→ Cas de 2 singularités : entourées dans le sens +



par déformation continue de C, l'intégrale a même valeur sur les contours suivants :

les contributions du petit bout se compensent

d'où
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

$$\rightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2i\pi \left[\mathrm{Res}\,[f, z_0] + \mathrm{Res}\,[f, z_1] \right]$$

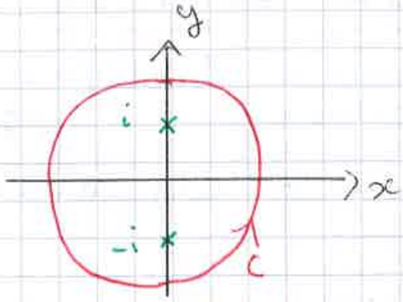
→ N singularités : entourées dans le sens +

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{p=1}^{N} \mathrm{Res}[f, z_p]}$$

Autrement dit : l'intégrale de f sur C ne dépend que de valeurs en N points z_p.

- Application : Calcul d'intégrale

$$f(z) = \frac{e^{z}}{z^2+1^2}$$ à intégrer sur $C(0, R>1)$



2 pôles : $\pm i$

$$f(z) = \frac{e^{z}}{(z+i)(z-i)}$$

$$\text{Res}[f, i] = \frac{e^{i}}{2i} \qquad \text{Res}[f, -i] = \frac{e^{-i}}{-2i}$$

$$\sum_i \text{Res} = \frac{e^{i} - e^{-i}}{2i} = \sin 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C f(z)\, dz = 2i\pi \sin 1}$$

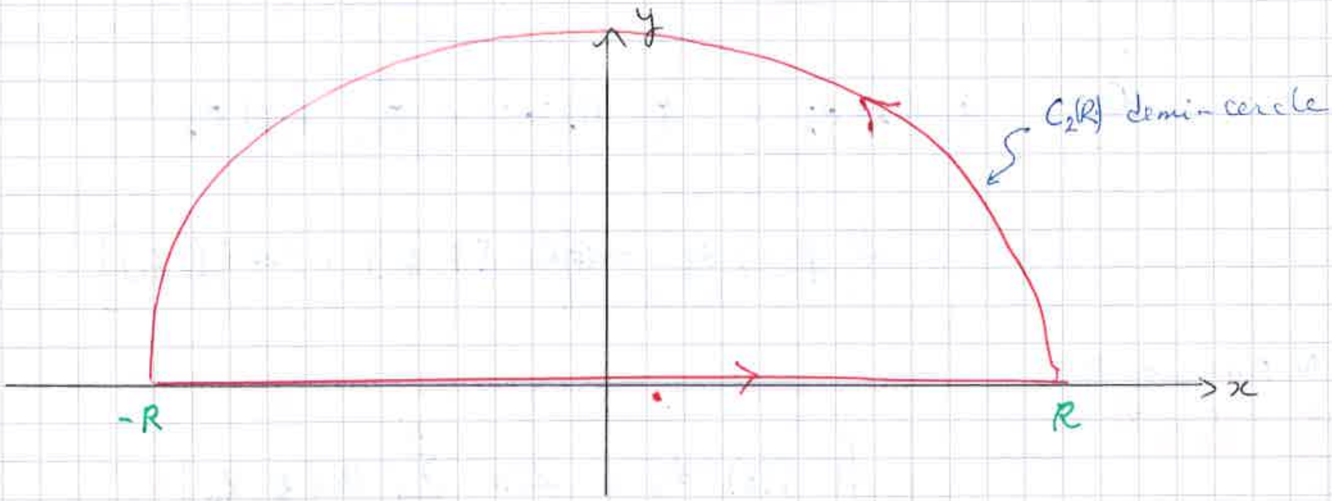
3) Application au calcul d'intégrales réelles :

Soit l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; I réelle converge.

Idée : évaluer cette intégrale à partir d'une intégrale de contour dans $\mathbb{C}$

→ Soit $f(z)$ la prolongée analytique de $f(x)$ dans $\mathbb{C}$.

→ Soit $C(R)$ le contour suivant :



on a donc
$$\oint_{C(R)} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_2(R)} f(z)\, dz$$

faisons tendre $R \to \infty$:
$$\oint_{C(\infty)} f(z)\, dz = I + \int_{C_2(\infty)} f(z)\, dz = 2i\pi \sum_p \text{Res}[f, z_p]$$

Donc si on sait évaluer la contribution du $\frac{1}{2}$ cercle C_2 on peut calculer l'intégrale réelle.

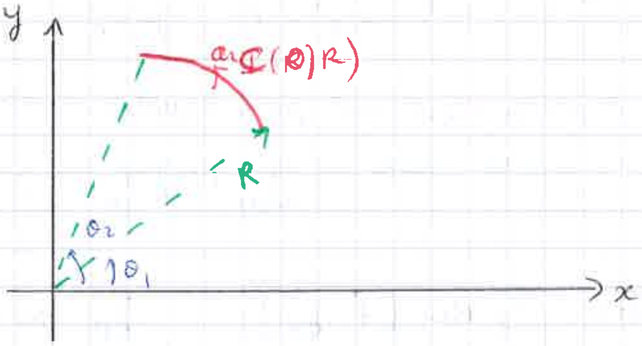
Il existe des cas particuliers pour lesquels cette contribution est nulle.

a) Premier lemme d'intégration

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe ayant éventuellement des singularités isolées (= fonction méromorphe)

on cherche à évaluer $I(R) = \int_{arc(0,R)} f(z)\, dz$

avec arc $(0,R)$ un arc de cercle de centre O, de rayon R et défini pour $\theta \in$ un intervalle donné $[\theta_1,\theta_2]$ (par ex. $0,\pi$).



$$\boxed{\text{Si } |z f(z)| \xrightarrow[\substack{R\to\infty \\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]}]{} 0 \quad \text{alors} \quad I(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0}$$

autrement dit : la contribution de l'arc $\to 0$ pour les fonctions qui décroissent plus vite que $\frac{1}{z}$

dém : on paramètre l'arc :

$z = Re^{it}$ $\quad t_1 = \theta_1$, $t_2 = \theta_2$ $\quad dz = iRe^{it}\, dt$

$\lim \int = \int \lim \Rightarrow CU$

$$I(R) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z).\, i\underbrace{Re^{it}}_{z}\, dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{z f(z)}_{\to 0 \text{ dans l'intervalle}} .\, i\, dt \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

ou, plus propre :

$$z f(z) \leqslant Z(R) \text{ sur l'intervalle } [\theta_1, \theta_2] \text{ à } R \text{ fixé.}$$

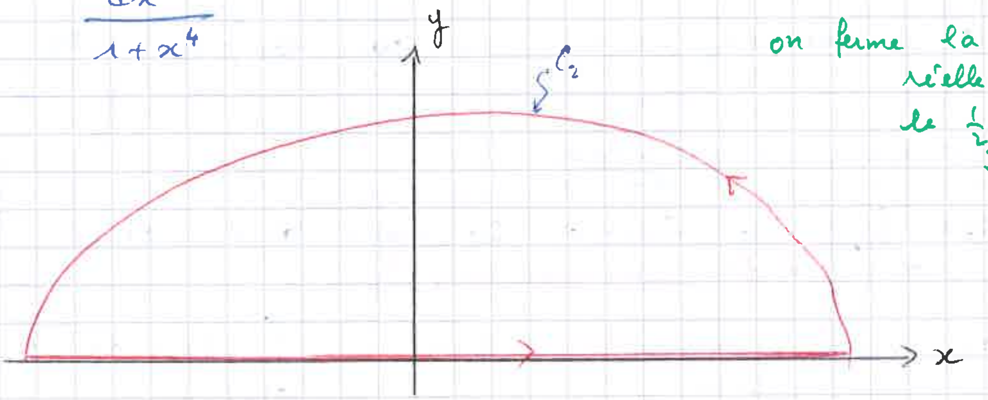
$$z f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 \quad \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2] \Rightarrow Z(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\text{et } I(R) \leqslant Z(R) \int_{\theta_1}^{\theta_2} i\, dt = i(\theta_2-\theta_1) Z(R)$$

$\downarrow$ 0 quand $R \to \infty$

$\ast$ application :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$



on ferme la droite réelle par le $\frac{1}{2}$ cercle $Im(z) > 0$.

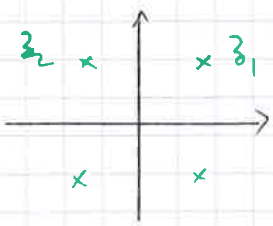
C_2 : demi-cercle de rayon R pour $\theta \in [0, \pi]$

Sur C_2 : $|z f(z)| = \left| \frac{z}{1+z^4} \right| = \frac{R}{|1+z^4|} \simeq \frac{1}{R^3} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow$ on est ok pour appliquer le lemme et dire que $\int_{C_2} f(z)\, dz = 0$

d'où : $I = 2i\pi \sum_i Res[f, z_p]$ $\quad z_p$ pôles dans le $\frac{1}{2}$ disque.

$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ a 4 pôles simples : $\underbrace{e^{i\pi/4}}_{z_1}$, $\underbrace{e^{3i\pi/4}}_{z_2}$, $\underbrace{e^{5i\pi/4}}_{z_3}$ et $\underbrace{e^{7i\pi/4}}_{z_4}$



$\rightarrow$ 2 pôles dans la région qui nous intéresse

$f(z)$ de la forme $\frac{A(z)}{B(z)} \rightarrow Res = \frac{A(z_k)}{B(z_k)} = \frac{1}{4 z_k^3}$

$$Res[f, z_1] = \frac{1}{4 e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-3i\pi/4}$$

$$Res[f, z_2] = \frac{1}{4 e^{9i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4}$$

$$\sum_i Res = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4} \left(1 + \underbrace{e^{-2i\pi/4}}_{-i}\right) = \frac{-i}{4} e^{-\frac{i\pi}{4}} (1-i)$$

$$I = 2i\pi \sum_i Res = \frac{\pi}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} (1-i) = \frac{\pi}{2} \left(\underbrace{e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{i\pi}{4}}}_{\substack{z + \bar{z} = 2 Re\, z \\ = \sqrt{2}}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow$ réel : OK !

b) Second lemme : Lemme de Jordan

Ça concerne des intégrals de type transformées de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx$$

on considère la fonction $f(z)\, e^{i\lambda z} = g(z)$.

on cherche à évaluer

$$I(R) = \int_{arc(0,R)} g(z)\, dz.$$

le lemme s'énonce ainsi :

$$\boxed{\text{si } \quad |f(z)| \underset{\substack{R\to\infty \\ \theta [\theta_1, \theta_2]}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{alors} \quad I(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

La contrainte est donc moins forte que dans le cas précédent, les oscillations de $e^{i\lambda z}$ permettent de la relâcher.

dém :

on paramètre l'arc :

$$z = Re^{it} \quad \begin{cases} t_1 = \theta_1 \\ t_2 = \theta_2 \end{cases} \qquad dz = iR\, e^{it}\, dt$$

$$e^{i\lambda z} = e^{i\lambda R e^{it}} = e^{i\lambda R(\cos t + i \sin t)} = e^{-\lambda R \sin t} \cdot e^{i\lambda R \cos t}$$

$$\Rightarrow \quad I(R) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z) \cdot e^{-R\lambda \sin t}\, e^{i\lambda R \cos t}\, iR\, e^{it}\, dt$$

$$= i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z) \cdot R\, e^{-\lambda R \sin t}\, \underbrace{e^{i(t + \lambda R \cos t)}}_{\text{de module } 1}\, dt$$

on peut majorer $|I(R)|$ car $|\int| \leq \int|\,|$ (inégalité triangulaire)

$$\Rightarrow \quad |I(R)| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\underbrace{|f(z)|}_{\substack{\to 0 \\ \text{au loin}}}\; \underbrace{R\, e^{-\lambda R \sin t}}_{\to 0 \text{ au loin}}}_{\to 0 \text{ au loin}}\, dt$$

Si $\lambda \sin t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{intervalle} \\ [0,\pi] : \lambda > 0 \\ [-\pi, 0] : \lambda < 0 \end{cases}$

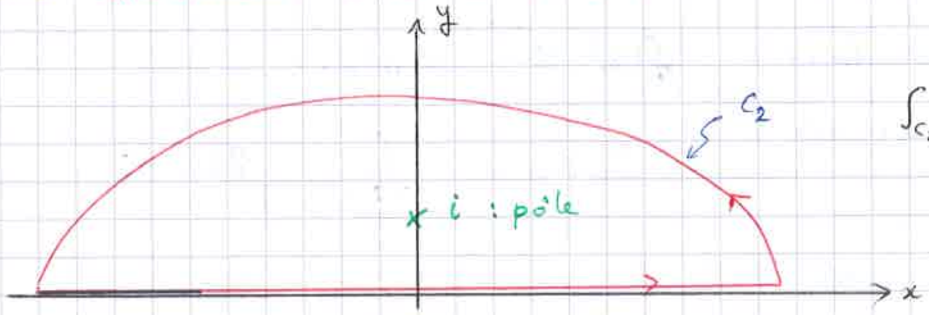
par la même gymnastique que l'autre lemme $|I(R)| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$

et par suite $I(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$

* Application

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\, dx \qquad f(z) = \frac{1}{1+z^2} \to 0 \text{ au loin.}$$

avec $\lambda > 0$ $\Rightarrow$ le contour C_2 est au dessus



$\int_{C_2} = 0$: lemme de Jordan.

donc $I = 2i\pi \sum \text{Res}\,[g, z_p] =$

$g(z)$ de la forme $\dfrac{A(z)}{B(z)} \Rightarrow \text{Res}\,[g, z_k] = \dfrac{A(z_k)}{B'(z_k)}$

$$\text{Res}\,[g, i] = \frac{e^{-\lambda}}{2i} \Rightarrow \boxed{I = \pi e^{-\lambda}}$$